TRẦN VĂN THƯƠNG - NGUYỄN ANH TRƯỜNG
NGUYỄN PHÚ KHÁNH - ĐẬU THANH KỲ
NGUYỄN MINH NHIÊN - NGUYỄN TẤT THU
NGUYỄN TẤN SIÊNG - ĐỖ NGỌC THỦY
(Nhóm giáo viên chuyên toán THPT)

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC 11

Dành cho học sinh lớp 11 ôn tập và nâng cao kiến thức
Biên soạn theo nội dung sách giáo khoa của Bộ GD & ĐT

Nhà sách KHANG VIỆT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

"Phân loại và phương pháp giải Hình học 11" *là một trong những cuốn thuộc bộ sách* ***"Phân loại và phương pháp giải theo chuyên đề: lớp 10, 11, 12"****, do nhóm tác giả chuyên toán THPT biên soạn.*

Với cách viết khoa học và sinh động, cuốn sách sẽ giúp bạn đọc tiếp cận với môn toán một cách tự nhiên, không áp lực. Bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn, hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Tác giả chú trọng biên soạn những câu hỏi mở, nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi đại học, đồng thời phân bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay, đề thi đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó.

Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất. Vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này.

Ludwig Van Beethoven đã từng nói: " Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm".

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn.

Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch Vụ Văn Hóa Khang Việt

71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao, Quận 1, TP. HCM

Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 39111968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880

Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

CHỦ ĐỀ: PHÉP BIẾN HÌNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Ta kí hiệu phép biến hình là F và viết $F(M)=M'$ hay $M'=F(M)$, khi đó M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu H là một hình nào đó thì hình $H'=\{M' \mid M'=F(M), M\in H\}$ được gọi là ảnh của hình H qua phép biến hình F, ta viết $H'=F(H)$.

Vậy $H'=F(H) \Leftrightarrow \left(\forall M\in H \Leftrightarrow M'=F(M)\in H'\right)$

Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là *phép đồng nhất*.

Phép tịnh tiến

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

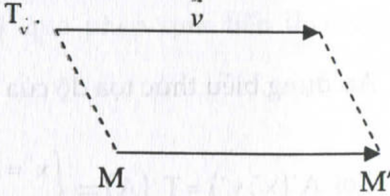
1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng cho vecto $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$ được gọi là *phép tịnh tiến theo vecto* $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

Vậy thì $T_{\vec{v}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$

Nhận xét: $T_{\vec{0}}(M)=M$



2. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$ và $\vec{v}=(a;b)$.

Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=a \\ y'-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$ (*)

Hệ (*) được gọi là biểu thức tọa độ của $T_{\vec{v}}$.

3. Tính chất của phép tịnh tiến.

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP TỊNH TIẾN.

Phương pháp:

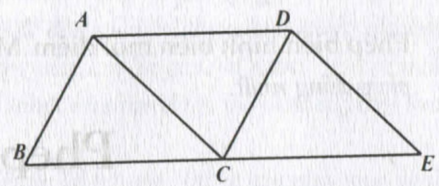
Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có $T_{\overrightarrow{BC}}(B) = C$.



Để tìm ảnh của điểm A ta dựng hình bình hành $ABCD$. Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$, gọi E là điểm đối xứng với B qua C, khi đó $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$

Suy ra $T_{\overrightarrow{BC}}(C) = E$. Vậy ảnh của tam giác ABC là tam giác DCE.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (-2;3)$. Hãy tìm ảnh của các điểm $A(1;-1), B(4;3)$ qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$.

Lời giải

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

Gọi $A'(x';y') = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 + (-2) \\ y' = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;2)$

Tương tự ta có ảnh của B là điểm $B'(2;6)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (1;-3)$ và đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Lời giải

Cách 1. Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Lấy điểm $M(x;y)$ tùy ý thuộc d, ta có $2x - 3y + 5 = 0 \quad (*)$

Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

Thay vào (*) ta được phương trình $2(x'-1) - 3(y'+3) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 6 = 0$.

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Cách 2. Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Do $d' = T_{\vec{v}}(d)$ nên d' song song hoặc trùng với d, vì vậy phương trình đường thẳng d' có dạng $2x - 3y + c = 0$.(**)

Lấy điểm $M(-1;1) \in d$. Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-1+1; 1-3) = (0;-2)$.

Do $M' \in d' \Rightarrow 2.0 - 3.(-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Cách 3. Để viết phương trình d' ta lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc d, tìm tọa độ các ảnh M', N' tương ứng của chúng qua $T_{\vec{v}}$. Khi đó d' đi qua hai điểm M' và N'.

Cụ thể: Lấy $M(-1;1), N(2;3)$ thuộc d, khi đó tọa độ các ảnh tương ứng là $M'(0;-2), N'(3;0)$. Do d' đi qua hai điểm M', N' nên có phương trình $\dfrac{x-0}{3} = \dfrac{y+2}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 6 = 0$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v} = (2;-3)$.

Lời giải

Cách 1. Sử dụng biểu thức tọa độ.

Lấy điểm $M(x;y)$ tùy ý thuộc đường tròn (C), ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \ (*)$

Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

Thay vào phương trình (*) ta được

$(x'-2)^2 + (y'+3)^2 + 2(x'-2) - 4(y'+3) - 4 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2x' + 2y' - 7 = 0$.

Vậy ảnh của (C) là đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Cách 2. Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Dễ thấy (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $r=3$. Gọi $(C')=T_{\vec{v}}((C))$ và $I'(x';y');r'$ là tâm và bán kính của (C').

Ta có $\begin{cases} x'=-1+2=1 \\ y'=2-3=-1 \end{cases} \Rightarrow I'(1;-1)$ và $r'=r=3$ nên phương trình của đường tròn (C') là $(x-1)^2+(y+1)^2=9$.

Bài toán 02: XÁC ĐỊNH PHÉP TỊNH TIẾN KHI BIẾT ẢNH VÀ TẠO ẢNH.

Phương pháp:

Xác định phép tịnh tiến tức là tìm tọa độ của $\vec{v}$. Để tìm tọa độ của $\vec{v}$ ta có thể giả sử $\vec{v}=(a;b)$, sử dụng các dữ kiện trong giả thiết của bài toán để thiết lập hệ phương trình hai ẩn a,b và giải hệ tìm a,b.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,cho đường thẳng $d:3x+y-9=0$. Tìm phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$ có giá song song với Oy biến d thành d' đi qua điểm $A(1;1)$.

Lời giải

$\vec{v}$ có giá song song với Oy nên $\vec{v}=(0;k)(k\neq 0)$

Lấy $M(x;y)\in d \Rightarrow 3x+y-9=0$ (*). Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)\Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y+k \end{cases}$ thay vào (*) $\Rightarrow 3x'+y'-k-9=0$

Hay $T_{\vec{v}}(d)=d':3x+y-k-9=0$, mà d đi qua $A(1;1)\Rightarrow k=-5$.

Vậy $\vec{v}=(0;-5)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường hai thẳng $d:2x-3y+3=0$ và $d':2x-3y-5=0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$ có phương vuông góc với d để $T_{\vec{v}}(d)=d'$.

Lời giải

Đặt $\vec{v}=(a;b)$, lấy điểm $M(x;y)$ tùy ý thuộc d, ta có $d:2x-3y+3=0$ (*)

Gọi sử $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$.Ta có $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$, thay vào (*) ta được phương trình $2x'-3y'-2a+3b+3=0$.

Từ giả thiết suy ra $-2a+3b+3=-5 \Leftrightarrow 2a-3b=-8$.

Vec tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n}=(2;-3)$ suy ra VTCP $\vec{u}=(3;2)$.

Do $\vec{v}\perp\vec{u}\Rightarrow \vec{v}.\vec{u}=3a+2b=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a-3b=-8 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{16}{13} \\ b=\dfrac{24}{13} \end{cases}$

Vậy $\vec{v}=\left(-\dfrac{16}{13};\dfrac{24}{13}\right)$.

Bài toán 03: DÙNG PHÉP TỊNH TIẾN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

Để dựng một điểm M ta tìm cách xem nó là ảnh của một điểm đã biết qua một phép tịnh tiến, hoặc xem M là giao điểm của hai đường trong đó một đường cố định còn một đường là ảnh của một đường đã biết qua phép tịnh tiến.

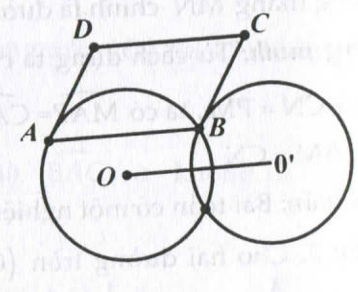
Lưu ý: Ta thường dùng kết quả: Nếu $T_{\vec{v}}(N)=M$ và $N\in(H)$ thì $M\in(H')$ trong đó $(H')=T_{\vec{v}}((H))$ và kết hợp với M thuộc hình (K) (trong giả thiết) suy ra $M\in(H')\cap(K)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai điểm phân biệt C,D nằm ngoài (O). Hãy dựng dây cung AB của đường tròn (O) sao cho ABCD là hình bình hành.

Lời giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được dây cung AB thỏa mãn yêu cầu bài toán



Do ABCD là hình bình hành nên $AB=DC$

$\Rightarrow T_{\overrightarrow{CD}}(A)=B$.

Nhưng $A\in(O)\Rightarrow B\in(O')=T_{\overrightarrow{DC}}((O))$.

Vậy B vừa thuộc (O) và (O') nên B chính là giao điểm của (O) và (O').

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua $T_{\overrightarrow{DC}}$
- Dựng giao điểm B của (O) và (O')

- Dựng đường thẳng qua B và song song với CD cắt (O) tại A.

Dây cung AB là dây cung thỏa yêu cầu bài toán.

Chứng minh: Từ cách dựng ta có $T_{\overrightarrow{DC}}(A)=B\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

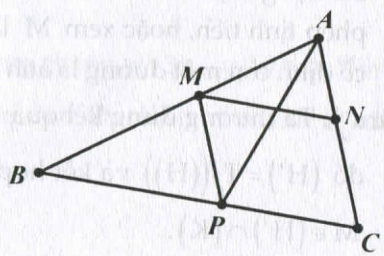
Biện luận:

- Nếu $CD>2R$ thì bài toán vô nghiệm.
- Nếu $CD=2R$ thì có một nghiệm.
- Nếu $CD<2R$ thì có hai nghiệm.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng d song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho $AM=CN$.

Lời giải.

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường thẳng d thỏa mãn bài toán. Từ M dựng đường thẳng song song với AC cắt BC tại P, khi đó MNCP là hình bình hành nên $CN=PM$. Lại có $AM=CN$ suy ra $MP=MA$, từ đó ta có AP là phân giác trong của góc A.



Cách dựng:

- Dựng phân giác trong AP của góc A
- Dựng đường thẳng đi qua P song song với AC cắt AB tại M
- Dựng ảnh $N=T_{\overrightarrow{PM}}(C)$.

Đường thẳng MN chính là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chứng minh: Từ cách dựng ta có MNCP là hình bình hành suy ra $MN \parallel BC$ và $CN=PM$, ta có $\widehat{MAP}=\widehat{CAP}=\widehat{APM}\Rightarrow \Delta MAP$ cân tại $M\Rightarrow AM=MP$.

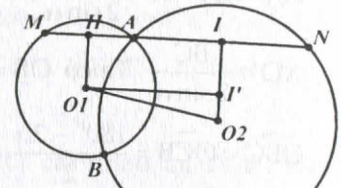
Vậy $AM=CN$

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn tại các điểm thứ hai M, N sao cho $MN=2l$ cho trước.

Lời giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng d đi qua A và cắt các đường tròn $(O_1),(O_2)$ tương ứng tại các điểm M, N sao cho $MN=2l$.



Kẻ $O_1H\perp MN$ và $O_2I\perp MN$.

Xét $T_{\overrightarrow{HO_1}}(I)=I'\Rightarrow O_1I'=HI=\frac{1}{2}MN=l$.

Do tam giác $I'O_1O_2$ vuông tại I' nên $O_2I'=\sqrt{O_1O_2^2-l^2}$.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP TỊNH TIẾN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Nếu $T_{\vec{v}}(M)=M'$ và điểm M di động trên hình (H) thì điểm M' thuộc hình (H'), trong đó (H') là ảnh của hình (H) qua $T_{\vec{v}}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt B, C cố định trên đường tròn (O) tâm O. Điểm A di động trên (O). Chứng minh khi A di động trên (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Vì $\widehat{BCD}=90^0$, nên $DC \parallel AH$. Tương tự $AD \parallel CH$, do đó ADCH là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OM}$ không đổi

$\Rightarrow T_{2\overrightarrow{OM}}(A)=H$, vì vậy khi A di động trên đường tròn (O) thì H di động trên đường tròn $(O')=T_{2\overrightarrow{OM}}((O))$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định, $\widehat{BAC}=\alpha$ không đổi và $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ không đổi. Tìm tập hợp các điểm B, C.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó theo định lí sin ta có $\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$ không đổi (do $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ không đổi).

Vậy $OA = R = \dfrac{BC}{2\sin\alpha}$, nên O di động trên đường tròn tâm A bán kính $AO = \dfrac{BC}{2\sin\alpha}$. Ta có $OB = OC = R$ không đổi và $\widehat{BOC} = 2\alpha$ không đổi suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \dfrac{180^0 - 2\alpha}{2}$ không đổi. Mặt khác $\overrightarrow{BC}$ có phương không đổi nên $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cũng có phương không đổi.

Đặt $\overrightarrow{OB} = \vec{v_1}, \overrightarrow{OC} = \vec{v_2}$ không đổi, thì $T_{\vec{v_1}}(O) = B, T_{\vec{v_2}}(O) = C$.

Vậy tập hợp điểm B là đường tròn $\left(A_1; \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ ảnh của $\left(A, \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\vec{v_1}}$,

và tập hợp điểm C là đường tròn $\left(A_2; \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ ảnh của $\left(A, \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\vec{v_2}}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: 2x + 3y - 2 = 0$, $d_1: 2x + 3y - 5 = 0$ và vec tơ $\vec{v} = (2; -1)$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm vec tơ $\vec{u}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{u}}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường hai thẳng $d: 3x - 5y + 3 = 0$ và $d': 3x - 5y + 24 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ và $T_{\vec{v}}(d) = d'$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $\vec{v} = (-3; 4)$. Tìm ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$.

4. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM, AN cắt tiếp tuyến tại B tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ.

5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O;R), trong đó AD = R. Dựng các hình bình hành DABM và DACN. Chứng minh tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DNM nằm trên (O;R).

6. Cho tam giác ABC cố định có trực tâm H. Vẽ hình thoi BCDE. Từ D và E vẽ các đường vuông góc với AB và AC, các đường thẳng này cắt nhau tại M. Tìm tập hợp điểm M.

7. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và A, B là hai điểm không thuộc hai đường thẳng đó sao cho AB không song song hoặc trùng với d_1 (hay d_2). Tìm trên d_1 điểm M và trên d_2 điểm N sao cho ABMN là hình bình hành.

8. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O_1; R)$ và $(O_2; R)$ cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng d vuông góc với AB cắt (O_1) tại C, D và cắt (O_2) tại E, F sao cho $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng.

a) Chứng minh $\widehat{CAE}$ không phụ thuộc vào vị trí của d.

b) Tính độ dài CE theo R và AB = a.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1.a) d' song song hoặc trùng d nên phương trình có dạng $2x + 3y + c = 0$.

Lấy $M(0;1) \in d \Rightarrow T_{\vec{v}}(M) = M'(2;0)$; mà d' đi qua M' nên $c = -4$.

Vậy $d': 2x + 3y - 4 = 0$.

b) Gọi $\vec{u}(a;b)$.

Do $\vec{u}$ có giá vuông góc với d nên $\vec{u}.\vec{n_d} = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b = 0$ (1)

Lấy $N(x;y) \in d \Rightarrow 2x + 3y - 2 = 0$ (*), gọi $N'(x';y') = T_{\vec{u}}(N)$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$, thay vào (*) ta được $2(x' - a) + 3(y' - b) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x' + 3y' - 2a - 3b - 2 = 0$.

Vậy $d_1: 2x + 3y - 2a - 3b - 2 = 0 \Rightarrow -2a - 3b - 2 = -5$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6}{13} \\ b = \dfrac{9}{13} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left(\dfrac{6}{13}; \dfrac{9}{13}\right)$.

2. Đặt $\vec{v} = (a;b)$, lấy điểm $M(x;y)$ tùy ý thuộc d, ta có $3x - 5y + 3 = 0$ (*)

Gọi sử $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M)$. Ta có $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$, thay vào (*) ta được phương trình $3(x' - a) - 5(y' - b) + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' - 3a + 5b + 3 = 0$

Hay $d': 3x - 5y - 3a + 5b + 3 = 0$.

Nên từ giả thiết ta có $-3a+5b+3=24$, kết hợp với $|\vec{v}|=\sqrt{13}$

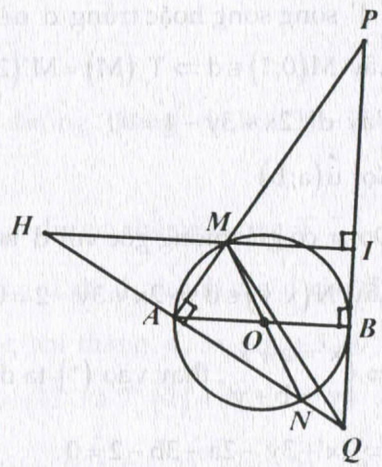
$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow a^2+b^2=13$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}-3a+5b=21\\ a^2+b^2=13\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5b-21}{3}\\ \left(\dfrac{5b-21}{3}\right)^2+b^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5b-21}{3}\\ 17b^2-105b+162=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=3\\ a=-2\end{cases}\\ \begin{cases}b=\dfrac{54}{17}\\ a=-\dfrac{101}{17}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $\vec{v}=(-2;3)$ hoặc $\vec{v}=\left(\dfrac{54}{17};-\dfrac{101}{17}\right)$.

3. ĐS: $(C'):(x+4)^2+(y-6)^2=9$.

4. Dễ thấy AQ là một đường cao của tam giác MPQ, kẻ $MI\perp PQ, I\in PQ$ cắt AQ tại H thì H là trực tâm của tam giác MPQ. Ta có AO // MH và O là trung điểm của MN nên AO là đường trung bình của tam giác MNH suy ra $\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow T_{\overrightarrow{BA}}(M)=H$ mà $M\in(O)$ (trừ A, B) nên quỹ tích điểm H là ảnh của đường tròn (O) (bỏ hai điểm A, B) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.



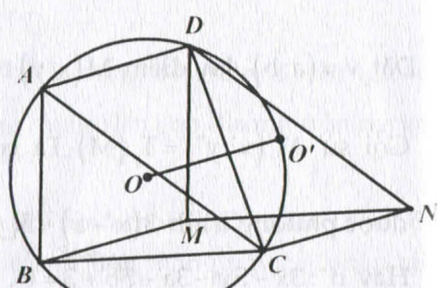
Tương tự quỹ tích trực tâm tam giác NPQ cũng là ảnh của đường tròn (O) (bỏ hai điểm A, B) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

5. Do DABM là hình bình hành nên $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow T_{\overrightarrow{AD}}(B)=M$.

Tương tự DACN cũng là hình bình hành nên $T_{\overrightarrow{AD}}(C)=N$.

Vậy $T_{\overrightarrow{AD}}(\Delta ABC)=\Delta DMN$ nên biến tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN do đó $T_{\overrightarrow{AD}}(O)=O'\Rightarrow \overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow OO'=AD=R$, hay $O'\in(O;R)$.



6. Tứ giác BCDE là hình thoi nên BC = DE.

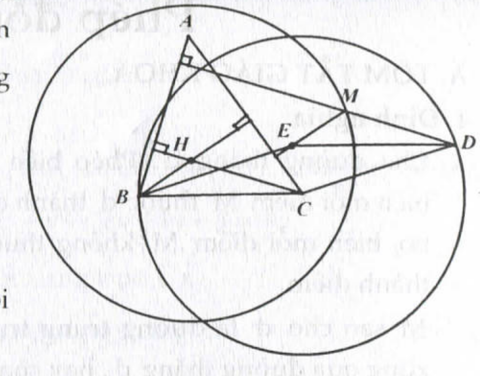
Do BH // ME và CB // DE nên $\widehat{MED}=\widehat{HBC}$ (góc có cạnh tương ứng song song).

Tương tự $\widehat{MDE}=\widehat{HCB}$

suy ra $\Delta HBC=\Delta MED$

$\Rightarrow DM=CH$ hay $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{CH}$

$\Rightarrow T_{\overrightarrow{CH}}(D)=M$ mà BCDE là hình thoi nên $CD=BC$



$\Rightarrow$ D thuộc đường tròn tâm C bán kính BC do đó điểm M thuộc đường tròn tâm H bán kính BC ảnh của đường tròn tâm C bán kính BC qua $T_{\overrightarrow{CH}}$.

7. *Phân tích:* Giả sử đã dựng được hai điểm M, N lần lượt trên các đường thẳng $d_1;d_2$ sao cho ABMN là hình bình hành.

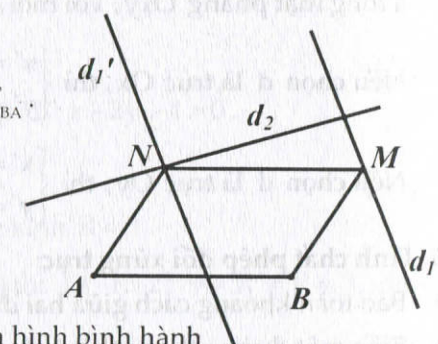
Khi đó $T_{\overrightarrow{BA}}(M)=N$, mà $M\in d_1$ nên $N\in d_1'=T_{\overrightarrow{BA}}(d_1)$.

Mặt khác $N\in d_2\Rightarrow N\in d_2\cap d_1'$.

Cách dựng:

- Dựng d_1' ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.
- Dựng giao điểm $N=d_2\cap d_1'$.
- Dựng đường thẳng qua N và song song với AB cắt d_1 tại M.

Các điểm M, N là các điểm cần dựng.



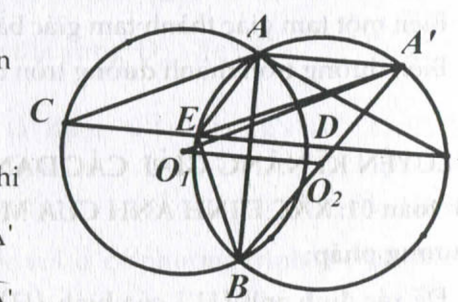
Chứng minh: Từ cách dựng suy ra ABMN là hình bình hành

Biện luận: Do d_1 và d_2 cắt nhau nên d_1' và d_2 cũng cắt nhau, vì vậy bài toán có một nghiệm hình.

8. a) Vì hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính bằng nhau nên $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}((O_1))=(O_2)$.

Gọi $A'=T_{\overrightarrow{O_1O_2}}(A)$ thì A' cố định, khi đó $E=T_{\overrightarrow{O_1O_2}}(C)$ nên $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}(CA)=EA'$

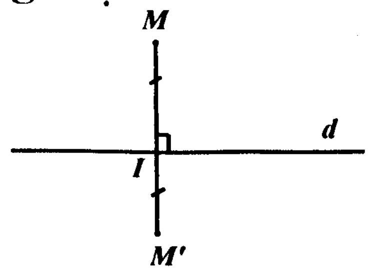
$\Rightarrow CA//EA'$ suy ra $\widehat{CAE}=\widehat{AEA'}=\widehat{ABA'}$ không đổi. Vậy $\widehat{CAE}$ không phụ thuộc vào vị trí của d.



b) Do CEA'A là hình bình hành nên $CE=AA'=\sqrt{BA'^2-AB^2}=\sqrt{4R^2-a^2}$.

Phép đối xứng trục

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.



1. Định nghĩa:

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d, hay còn gọi là phép đối xứng trục d.

Phép đối xứng trục có trục là đường thẳng d được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy

$Đ_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM'}$ với I là hình chiếu vuông góc của M trên d.

Nếu $Đ_d\left[(H)\right] = (H)$ thì d được gọi là trục đối xứng của hình (H).

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục:

Trong mặt phẳng Oxy, với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y') = Đ_d(M)$.

Nếu chọn d là trục Ox, thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Nếu chọn d là trục Oy, thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

3. Tính chất phép đối xứng trục:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA ĐỐI XỨNG TRỤC.

Phương pháp:

Để xác định ảnh (H') của hình (H) qua phép đối xứng trục ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dùng định nghĩa phép đối xứng trục

- Dùng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục mà trục đối xứng là các trục tọa độ.
- Dùng biểu thức vec tơ của phép đối xứng trục.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;5)$, đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Lời giải

a) Gọi $M', d', (C')$ theo thứ tự là ảnh của $M, d, (C)$ qua $Đ_{ox}$, khi đó $M'(1;-5)$.

- Tìm ảnh của d.

Lấy $M(x;y) \in d \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$ (1)

Gọi $N(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_{ox}$.

Ta có $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được $x' - 2y' + 4 = 0$. Vậy $d': x - 2y + 4 = 0$.

- Tìm ảnh của (C).

Cách 1: Ta thấy (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi I', R' là tâm và bán kính của (C') thì $I'(-1;-2)$ và $R' = R = 3$, do đó $(C'): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Cách 2: Lấy $P(x;y) \in (C) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ (2).

Gọi $Q(x';y')$ là ảnh của P qua phép đối xứng $Đ_{ox}$. Ta có

$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ thay vào (2) ta được $x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' - 4 = 0$, hay $(C'): x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$.

b) Đường thẳng d_1 đi qua M vuông góc với d có phương trình $2x - y + 3 = 0$.

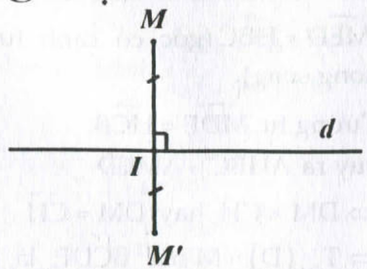
Gọi $I = d \cap d_1$ thì tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(-2;-1).$$

Phép đối xứng trục

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:



Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d, hay còn gọi là phép đối xứng trục d.

Phép đối xứng trục có trục là đường thẳng d được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy $Đ_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM'}$ với I là hình chiếu vuông góc của M trên d.

Nếu $Đ_d\left[(H)\right] = (H)$ thì d được gọi là trục đối xứng của hình (H).

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục:

Trong mặt phẳng Oxy, với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y') = Đ_d(M)$.

Nếu chọn d là trục Ox, thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Nếu chọn d là trục Oy, thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

3. Tính chất phép đối xứng trục:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA ĐỐI XỨNG TRỤC.

Phương pháp:

Để xác định ảnh (H') của hình (H) qua phép đối xứng trục ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dùng định nghĩa phép đối xứng trục

- Dùng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục mà trục đối xứng là các trục tọa độ.
- Dùng biểu thức vec tơ của phép đối xứng trục.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;5)$, đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Lời giải

a) Gọi $M', d', (C')$ theo thứ tự là ảnh của $M, d, (C)$ qua $Đ_{ox}$, khi đó $M'(1;-5)$.

- Tìm ảnh của d.

Lấy $M(x;y) \in d \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$ (1)

Gọi $N(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_{ox}$.

Ta có $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được $x' - 2y' + 4 = 0$. Vậy $d': x - 2y + 4 = 0$.

- Tìm ảnh của (C).

Cách 1: Ta thấy (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi I', R' là tâm và bán kính của (C') thì $I'(-1;-2)$ và $R' = R = 3$, do đó $(C'): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Cách 2: Lấy $P(x;y) \in (C) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ (2).

Gọi $Q(x';y')$ là ảnh của P qua phép đối xứng $Đ_{ox}$. Ta có

$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ thay vào (2) ta được $x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' - 4 = 0$, hay $(C'): x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$.

b) Đường thẳng d_1 đi qua M vuông góc với d có phương trình $2x - y + 3 = 0$.

Gọi $I = d \cap d_1$ thì tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(-2;-1).$$

Gọi M' đối xứng với M qua d thì I là trung điểm của MM'.

Ta có $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_1 = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_1 - x_M = -5 \\ y_{M'} = 2y_1 - y_M = -7 \end{cases} \Rightarrow M'(-5;-7)$.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d: x+y-2=0$, $d_1: x+2y-3=0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=4$. Tìm ảnh của $d_1, (C)$ qua phép đối xứng trục d.

Lời giải

- Tìm ảnh của d_1.

Ta có $d_1 \cap d = I(1;1)$ nên $Đ_d(I) = I$.

Lấy $M(3;0) \in d_1$. Đường thẳng d_2 đi qua M vuông góc với d có phương trình $x-y-3=0$. Gọi $M_0 = d \cap d_2$, thì tọa độ của M_0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Gọi M' là ảnh của M qua $Đ_d$ thì M_0 là trung điểm của MM' nên $M'(2;-1)$. Gọi $d_1' = Đ_d(d_1)$ thì d_1' đi qua I và M' nên có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \Leftrightarrow 2x+y-3=0$. Vậy $d_1': 2x+y-3=0$.

- Tìm ảnh của (C).

Đường tròn (C) có tâm $J(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng d_3 đi qua J và vuông góc với d có phương trình $x-y-2=0$.

Gọi $J_0 = d_3 \cap d$ thì tọa độ của điểm J_0 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow J_0(2;0).$$

Gọi $J' = Đ_d(J)$ thì J_0 là trung điểm của JJ' nên $J'(3;1)$

Gọi $(C') = Đ_d((C))$ thì J' là tâm của (C') và bán kính của (C') là $R' = R = 2$.

Vậy $(C'): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Bài toán 02: DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

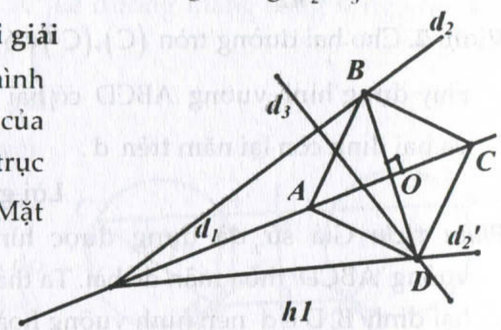
Phương pháp:

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng trục, hoặc xem M như là giao điểm của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua phép đối xứng trục.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựng hình vuông ABCD biết hai đỉnh A và C nằm trên đường thẳng d_1 và hai đỉnh B, D lần lượt thuộc hai đường thẳng d_2, d_3.

Lời giải



Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD, thỏa các điều kiện của bài toán. Do $A, C \in d_1$ và AC là trục đối xứng của hình vuông ABCD. Mặt khác $B \in d_2$ nên $D \in d_2'$

$\Rightarrow D = d_2' \cap d_3$.

Hai điểm B, D đối xứng qua đường thẳng d_1.

Nên $Đ_{d_1}(B) = D'$, lại có $D \in d_3 \Rightarrow D = d_3 \cap d_2'$.

Cách dựng:

- **Dựng $d_2' = Đ_{d_1}(d_2)$, gọi $D = d_2 \cap d_2'$**
- **Dựng đường thẳng qua D vuông góc với d_1 tại O và cắt d_2 tại B**
- **Dựng đường tròn tâm O đường kính BD cắt d_1 tại A, C. (Kí hiệu các điểm A, C theo thứ tự để tạo thành tứ giác ABCD)**

Chứng minh: **Từ cách dựng suy ra ABCD là hình vuông.**

Biện luận:

Trường hợp 1. d_2 cắt d_3 khi đó.

Nếu $d_2' \cap d_3$ thì ví dụ đã cho có một nghiệm hình.

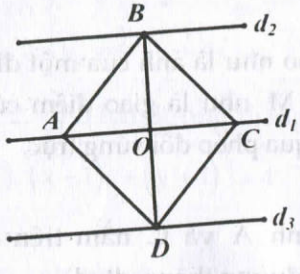
Nếu $d_2' \,//\, d_3$ thì ví dụ đã cho vô nghiệm hình.

Trường hợp 2. $d_2 \,//\, d_3$, khi đó

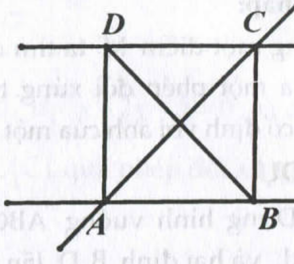
Nếu d_1 song song và cách đều d_2 và d_3 thì có vô số nghiệm hình (h2)

Nếu d_1 hợp với d_2, d_3 một góc 45° thì có một nghiệm hình (h3).

Nếu d_1 song song và không cách đều d_2, d_3 hoặc d_1 không hợp d_2, d_3 một góc $45°$ thì ví dụ đã cho vô nghiệm hình.



h2



h3

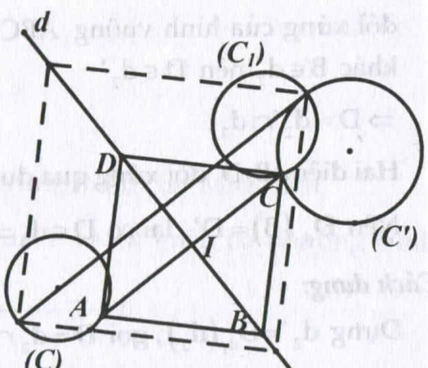
Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(C),(C')$ có bán kính khác nhau và đường thẳng d. Hãy dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt nằm trên $(C),(C')$ và hai đỉnh còn lại nằm trên d.

Lời giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa mãn đề bài. Ta thấy hai đỉnh $B, D \in d$ nên hình vuông hoàn toàn xác định khi biết C. Ta có A, C đối xứng qua d nên C thuộc đường tròn (C_1), ảnh của đường tròn (C) qua $Đ_d$.

Mặt khác $C \in (C') \Rightarrow C \in (C) \cap (C')$.

Từ đó suy ra cách dựng



Cách dựng:

- Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua $Đ_d$.
- Từ điểm C thuộc $(C_1) \cap (C')$ dựng điểm A đối xứng với C qua d. Gọi $I = AC \cap d$
- Lấy trên d hai điểm B, D sao cho $IB = ID = IA$.

Khi đó ABCD là hình vuông cần dựng.

Chứng minh:

Dễ thấy ABCD là hình vuông có $B, D \in d$, $C \in (C')$. Mặt khác A, C đối xứng qua d mà $C \in (C') \Rightarrow A \in Đ_d\left[(C')\right] = (C)$ hay A thuộc (C).

Biện luận:

Số nghiệm hình bằng số giao điểm của (C_1) và (C').

Bài toán 03: DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

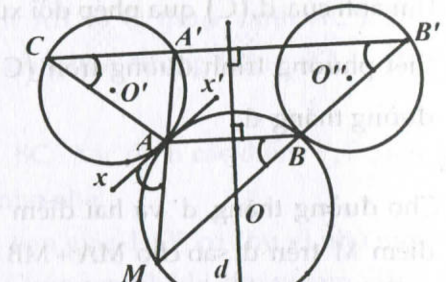
Sử dụng tính chất : Nếu $N = Đ_d(M)$ với M di động trên hình (H) thì N di động trên hình (H') - ảnh của hình (H) qua phép đối xứng trục d.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O,R) cho hai điểm cố định A, B. Đường tròn $(O';R')$ tiếp xúc ngoài với (O) tại A. Một điểm M di động trên (O). MA cắt (O') tại điểm thứ hai A'. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AB cắt MB tại B'. Tìm quỹ tích điểm B'.

Lời giải

Gọi $C = A'B' \cap (O')$. Vẽ tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại điểm A. Ta có $\widehat{A'CA} = \widehat{xAM} = \widehat{ABM} = \widehat{BB'A'}$ do đó ABB'C là hình thang cân. Gọi d là trục đối xứng của hình thang này thì $Đ_d(C) = B'$ mà C di động trên đường tròn (O') nên B' di động trên đường tròn (O'') ảnh của (O') qua $Đ_d$.

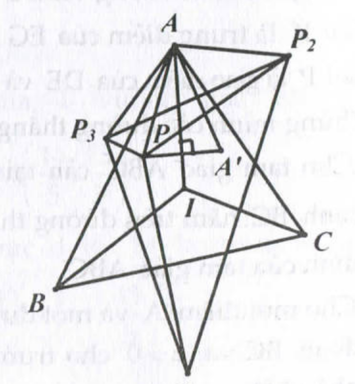


Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I, P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với P lần lượt đối xứng qua IA, IB, IC. Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải

Giả sử điểm P nằm trong tam giác IAB. Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt đối xứng với P qua các cạnh BC, CA, AB. Ta sẽ chứng minh AA', BB', CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.

Hiển nhiên ta có $AP_2 = AP_3$ vậy để chứng minh AA' là trung trực của P_2P_3 ta cần chứng minh $\widehat{P_2AA'} = \widehat{P_3AA'}$.



Ta có $\widehat{P_3AA'} = \widehat{P_3AP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta$

Tương tự $\widehat{P_2AA'} = \widehat{P_2AC} + \widehat{CAA'} = \widehat{CAP} + \widehat{CAA'} = 2\alpha + 2\beta$. Vậy $\widehat{P_2AA'} = \widehat{P_3AA'}$ nên AA' là trung trực của P_2P_3.

Tương tự BB', CC' lần lượt là trung trực của P_1P_3 và P_1P_2 nên chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + 2y - 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng trục có trục là

a) Ox b) Oy.

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

a) Tìm ảnh của $d, (C)$ qua phép đối xứng trục Ox.

b) Viết phương trình đường tròn (C'), ảnh của (C) qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

11.

a) Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của d. Xác định điểm M trên d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

b) Cho $x - 2y + 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}$.

12. Cho $A(2;1)$. Tìm điểm B trên trục hoành và điểm C trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$.

a) Gọi K là trung điểm của EG. Chứng minh K nằm trên đường thẳng AH.

b) Gọi P là giao điểm của DE và FG. Chứng minh P nằm trên đường thẳng AH.

c) Chứng minh các đường thẳng DC, BF, PH đồng qui.

14. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết cạnh AB nằm trên đường thẳng d_1, cạnh BC nằm trên đường thẳng d_2, cạnh AC đi qua M. Hãy xác định các đỉnh của tam giác ABC.

15. Cho một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A. Trên d đặt một đoạn $BC = a$ ($a > 0$ cho trước). Tìm vị trí của đoạn BC để tổng $AB + AC$ nhỏ nhất.

16. Cho hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2 và điểm M nằm ở miền giữa của hai đường thẳng đó (M và Δ_1 cùng phía đối với Δ_2, M và Δ_2 cùng phía đối với Δ_1). Trên Δ_1 lấy đoạn $AB = a$, trên Δ_2 lấy đoạn $CD = b$ (a, b là các độ dài cho trước). Tìm vị trí của các đoạn AB và CD sao cho tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

17. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A và có cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra một phép đối xứng trục biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $AB'C'D'$.

18. Gọi d_A là đường phân giác ngoài tại A của tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M trên d_A, chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

19. Cho tam giác ABC cân tại A. Với mỗi điểm M trên cạnh BC, ta dựng hình bình hành $APMQ$ (P thuộc cạnh AB và Q thuộc cạnh AC). Tìm tập hợp ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua đường thẳng PQ.

20. Cho tam giác nhọn ABC

a) Gọi D là một điểm cố định trên cạnh BC. Xác định các điểm E, F trên AB và AC sao cho chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

b) Cho D thay đổi trên cạnh BC. Dựng tam giác DEF có chu vi nhỏ nhất với E, F lần lượt thuộc các cạnh AB, AC. Chứng minh khi chu vi tam giác DEF nhỏ nhất thì D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác DEF theo $BC = a, CA = b, AB = c$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

9. a) $x - 2y - 5 = 0$ b) $x - 2y + 5 = 0$

10.

a) $2x + y - 3 = 0$ và $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

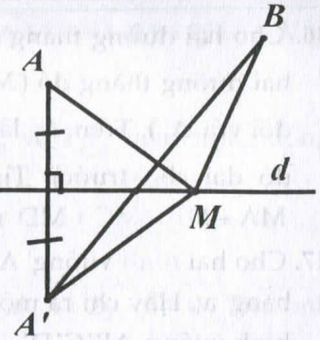
b) (C) có tâm $I(2;3)$, đường thẳng qua I vuông góc với d là $d_1: x + 2y - 8 = 0$. Giao điểm của d & d_1 là $M\left(\frac{14}{5}; \frac{13}{3}\right)$.

Gọi I' là ảnh của I qua phép đối xứng trục d thì M là trung điểm của $II' \Rightarrow I'\left(\frac{18}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Phương trình $(C'): \left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 = 4$.

11. a) Gọi A' đối xứng với A qua d, ta có $MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra khi M thuộc đoạn A'B mà $M \in d \Rightarrow M = A'B \cap d$.

Vậy $\min(MA + MB) = A'B$ khi $M = A'B \cap d$.



b) Xét $M(x;y) \Rightarrow M \in d: x - 2y + 2 = 0$ và $A(3;5), B(5;7)$, ta có $T = MA + MB$.

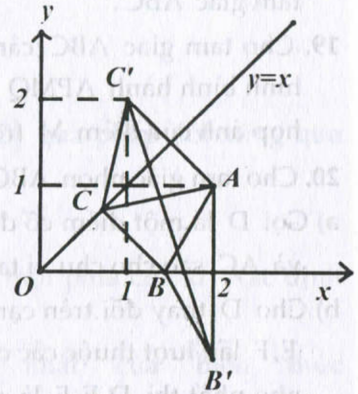
Do $(3 - 2.5 + 2)(5 - 2.7 + 2) > 0$ nên A, B nằm cùng phía đối với d.

Gọi A' đối xứng với A qua d thì $A'(5;1)$. Phương trình $A'B: x - 5 = 0$.

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 6$.

Đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap d \Rightarrow M\left(5;\dfrac{7}{2}\right)$.

12. Gọi B', C' lần lượt là ảnh của A qua các phép đối xứng trục có trục là Ox, Oy, khi đó ta có $B'(2;-1)$, $C'(1;2)$.



Ta có $AB = BB', AC = AC'$ nên chu vi tam giác ABC là $2p = AB + BC + CA$

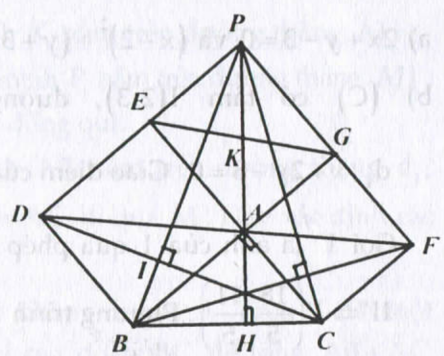
$= AB' + BC + CC' \geq B'C' = \sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi B và C là các giao điểm của B'C' với Ox và đường phân giác góc phần tư thứ nhất, từ đó không khó khăn gì ta tìm được $B'\left(\dfrac{5}{3};0\right)$ và $C'\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

13. a) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CAF} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CAF} + \widehat{BAC} = 180^0$ suy ra D, A, F thẳng hàng.

Xét phép đối xứng $Đ_{DF}$ có:

$A \mapsto A, B \mapsto E, C \mapsto G$ nên tam giác ABC biến thành tam giác AEG, do đó $\widehat{BCA} = \widehat{AGE}$ mà $\widehat{BCA} = \widehat{BAH}$ mặt khác tam giác AGE vuông tại A có trung tuyến $AK \Rightarrow KA = KG$ nên ΔKAG cân tại $K \Rightarrow \widehat{GAK} = \widehat{KAG}$ suy ra $\widehat{GAK} = \widehat{BAH}$ mà hai góc này nằm ở vị trí đối đỉnh nên $K \in AH$.



b) Do K là trung điểm của EG và AEPG là hình chữ nhật nên A, K, P thẳng hàng, hay $P \in AH$.

c) Dễ thấy $AP = EG$ mà $Đ_{DF}(BC) = EG \Rightarrow BC = EG$, $BC = AP$.

Lại có $BD = BA$, $DC = DG = BP \Rightarrow \Delta DBC = \Delta BAP \Rightarrow \widehat{BPA} = \widehat{DCB}$

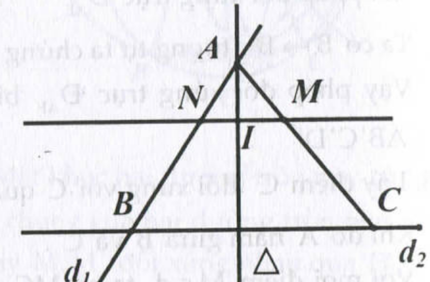
Mà $\widehat{BPH} + \widehat{PBH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ICB} + \widehat{IBC} = 90^0 \Rightarrow CD \perp PB$.

Tương tự chứng minh được $BF \perp PC$ nên DC, BF, PH là các đường cao của tam giác PBC nên chúng đồng qui.

14. Giả sử đã dựng được các điểm A, B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi Δ là đường trung trực của BC thì $A = \Delta \cap d_1$; $Đ_\Delta(C) = B$ và $B = d_1 \cap d_2$ từ đó ta có cách dựng:

- Qua M dựng đường thẳng song song với d_2 cắt d_1 tại N.
- Qua trung điểm I của MN dựng đường thẳng $\Delta \perp d_2$.
- Dựng giao điểm $A = \Delta \cap d_1$.
- Gọi $C = AM \cap d_2$
- Dựng $Đ_\Delta(C) = B$



Các điểm A, B, C là các điểm cần dựng.

Bạn đọc tự chứng minh và biện luận.

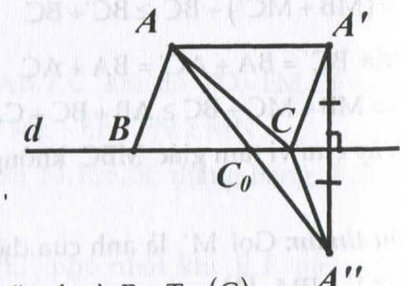
15. Xét $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} // d$ và $|\vec{u}| = a$

Gọi $T_{\vec{BC}}(A) = A'$ và $A'' = Đ_d(A')$

Ta có $AB = A'C$ nên $AB + AC = AC + CA'$

$= AC + CA'' \geq AA''$

$\Rightarrow \min(AB + AC) = AA''$ khi $C \equiv C_0 = AA'' \cap d$ và $B = T_{-\vec{u}}(C)$.



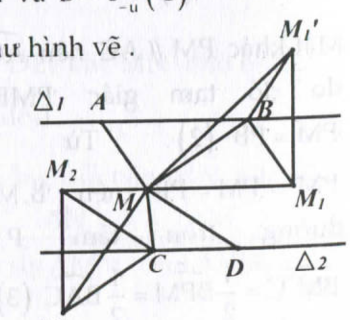
16. Giả sử các điểm A, B, C, D được sắp thứ tự như hình vẽ.

Gọi $M_1 = T_{\vec{AB}}(M), M_2 = T_{\vec{DC}}(M)$

$M_1' = Đ_{\Delta_1}(M_1), M_2' = Đ_{\Delta_1}(M_2)$.

Khi đó ta có $MA = M_1B = M_1'B$,

$MD = M_2C = M_2'C$ do đó:



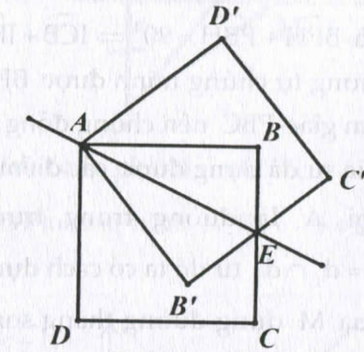
$MA + MB + MC + MD = MB + M_1'B + MC + M_2'C \geq MM_1' + MM_2'$.

Đẳng thức xảy ra khi $B = MM_1' \cap \Delta_1, C = MM_2' \cap \Delta_2$.

Vậy vị trí của các điểm như sau

$$B = MM_1' \cap \Delta_1, A = T_{BA}(A), C = MM_2' \cap \Delta_2, D = T_{CD}(C).$$

17. Gọi $E = BC \cap B'C'$.



Ta có $AB = AB', \widehat{ABE} = \widehat{AB'E} = 90^0$,

AE chung nên $\Delta ABE = \Delta AB'E$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ EB = EB' \end{cases}$

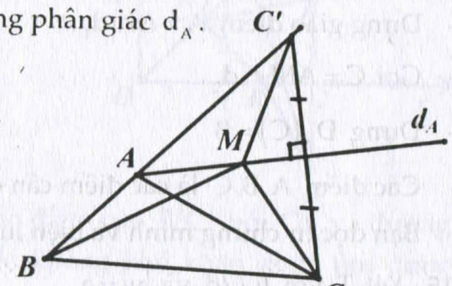
$\Rightarrow$ AE là đường trung trực của BB'.

Xét phép đối xứng trục $Đ_{AE}$

Ta có $B \mapsto B'$, tương tự ta chứng minh được $C \mapsto C' \Rightarrow D \mapsto D'$.

Vậy phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông AB'C'D'.

18. Lấy điểm C' đối xứng với C qua đường phân giác d_A.



Khi đó A nằm giữa B và C'.

Với mọi điểm $M \in d_A$ ta có $MC = MC'$,

chu vi tam giác MBC là $MB+MC+BC$

$= (MB + MC') + BC \geq BC' + BC$

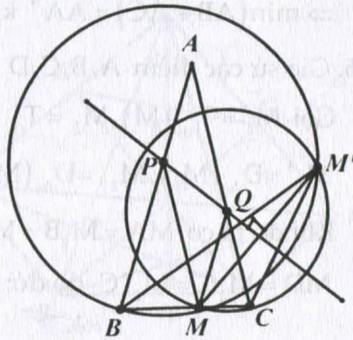
Mà $BC' = BA + AC' = BA + AC$

$\Rightarrow MB + MC + BC \geq AB + BC + CA$

Vậy chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

19.

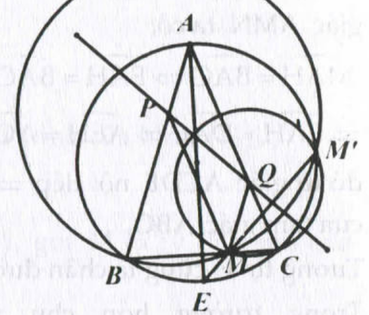
Phần thuận: Gọi M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục PQ. Khi đó $PM' = PM$ (1)



Mặt khác PM // AC nên $\widehat{ACB} = \widehat{PMB} = \widehat{BAC}$ do đó tam giác PMB cân suy ra $PM = PB$ (2). Từ (1),(2) ta có $PM' = PM = PB$ nên B,M,M' nằm trên đường tròn tâm P và ta có $\widehat{BM'C} = \frac{1}{2}\widehat{BPM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (3)

Tương tự ta có $QM' = QM = QC$ nên C,M,M' cùng nằm trên đường tròn tâm Q, do đó $\widehat{MM'C} = \frac{1}{2}\widehat{MQC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BM'C} = \widehat{BM'M} + \widehat{CM'M} = \widehat{BAC}$. Do đó M' thuộc cung tròn $\overset{\frown}{BAC}$.

Phần đảo: Giả sử M' thuộc cung tròn $\overset{\frown}{BAC}$ (trừ B,C). Gọi E là điểm chính giữa của cung BC không chứa A. Gọi $M = EM' \cap BC$, dựng hình bình hành APMQ với $P \in AB, Q \in AC$. Ta cần chứng minh M và M' đối xứng nhau qua đường thẳng PQ.



Do P,M' nằm cùng phía với BM và $\widehat{BM'M} = \widehat{BAE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BPM}$ nên M' thuộc đường tròn tâm P bán kính PB.

Tương tự ta cũng chứng minh được M' thuộc đường tròn tâm Q bán kính QC. Mặt khác hai đường tròn này cùng đi qua điểm M do đó MM' là dây cung chung của hai đường tròn nên nó đối xứng qua đường thẳng nối hai tâm, hay M,M' đối xứng nhau qua PQ.

Vậy tập hợp điểm M' là cung $\overset{\frown}{BAC}$ (trừ B,C).

20.

a) Với điểm D cố định trên cạnh BC

Gọi M,N lần lượt đối xứng với D qua AB,AC khi đó $ED = EM, DF = DN$

Chu vi tam giác DEF là $\zeta = DE + EF + FD = ME + EF + FN \geq MN$.

Vậy chu vi tam giác nhỏ nhất bằng MN, khi M,E,F,N thẳng hàng, E,F là giao điểm của MN với AB,AC.

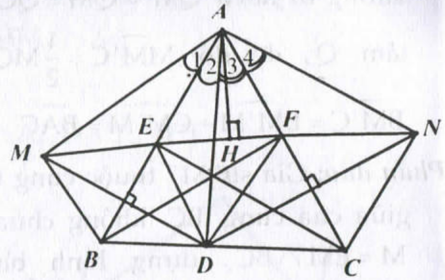
b) Ứng với mỗi điểm D, chu vi tam giác DEF nhỏ nhất khi E,F nằm trên MN và $\min(\zeta) = MN$.

Vậy khi D di chuyển trên cạnh, chu vi tam giác DEF khi MN nhỏ nhất.

Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = 2.\widehat{BAC}$ (không đổi).

Tam giác AMN cân tại A có $\widehat{MAN} = 2.\widehat{BAC}$ không đổi nên MN nhỏ nhất khi AM, AN nhỏ nhất (vì $\frac{MN}{\sin\widehat{MAN}} = \frac{AN}{\sin\widehat{AMN}} = \frac{AM}{\sin\widehat{ANM}}$ mà $\sin\widehat{MAN}, \sin\widehat{AMN}, \sin\widehat{ANM}$ không đổi).

Lại có $AM = AN = AD$ nên AM, AN nhỏ nhất khi AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD \perp BC$ hay D là chân đường cao của tam giác ABC.



Bây giờ ta chứng minh E, F cũng là chân các đường cao của tam giác ABC. Dựng đường cao AH của tam giác AMN ta có:

$\widehat{MAH} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{BAC} - \widehat{A}_1$, tương tự $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{A}_2$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{AEH} = \widehat{MAE} = \widehat{DEB}$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{DEB}$ do đó tứ giác $ACDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^0 \Rightarrow E$ là chân đường cao CE của tam giác ABC.

Tương tự F cũng là chân đường cao của tam giác ABC.

Trong trường hợp chu vi tam giác DEF nhỏ nhất này ta có

$MN = 2AH = 2.AM\sin\widehat{A} = 2AD\sin\widehat{A} = 2h_a\sin\widehat{A}$

Mà $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}abch_a\sin A = p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow MN = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Vậy chu vi tam giác DEF nhỏ nhất là $\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Phép đối xứng tâm

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Phép đối xứng tâm I được kí hiệu là $Đ_I$.

Vậy $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$

Nếu $Đ_I((H)) = (H)$ thì I được gọi là tâm đối xứng của hình (H).

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm.

Trong mặt phẳng Oxy cho $I(a;b)$, $M(x;y)$, gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

3. Tính chất phép đối xứng tâm.

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM.

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ và các tính chất của phép đối xứng tâm.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $d: x + 2y + 3 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

Lời giải

Cách 1. Lấy điểm $M(x;y) \in d \Rightarrow x + 2y + 3 = 0$ (*)

Gọi $M'(x';y') = Đ_I(M)$ thì $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$.

Thay vào (*) ta được $(2-x')+2(2-y')+3=0 \Leftrightarrow x'+2y'-9=0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': x+2y-9=0$.

Cách 2. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I, thì d' song song hoặc trùng với d nên phương trình d' có dạng $x+2y+c=0$.

Lấy $N(-3;0)\in d$, gọi $N'=Đ_I(N)$ thì $N'(5;2)$.

Lại có $N'\in d' \Rightarrow 5+2.2+c=0 \Leftrightarrow c=-9$.

Vậy $d': x+2y-9=0$.

Bài toán 02: XÁC ĐỊNH TÂM ĐỐI XỨNG KHI BIẾT ẢNH VÀ TẠO ẢNH.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $d: x-2y+6=0$ và $d': x-2y-10=0$. Tìm phép đối xứng tâm I biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của d,d' với Ox lần lượt là $A(-6;0)$ và $B(10;0)$.

Do phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó nên biến giao điểm A của d với Ox thành giao điểm A' của d' với Ox do đó tâm đối xứng là trung điểm của AA'. Vậy tâm đối xứng là $I(2;0)$.

Bài toán 03: TÌM TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tâm đối xứng của đường cong (C) có phương trình $y=x^3-3x^2+3$.

Lời giải

Lấy điểm $M(x;y)\in(C) \Rightarrow y=x^3-3x^2+3$ (*)

Gọi $I(a;b)$ là tâm đối xứng của (C) và $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Ta có $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a-x' \\ y=2b-y' \end{cases}$

Thay vào (*) ta được $2b-y'=(2a-x')^3-3(2a-x')^2+3$

$\Leftrightarrow y'=x'^3-3x'^2+3+(6-6a)x'^2+(12a^2-12a)x'-8a^3+12a^2+2b+6$ (*)

Mặt khác $M'\in(C)$ nên $y'=x'^3-3x'^2+3$ do đó (*)

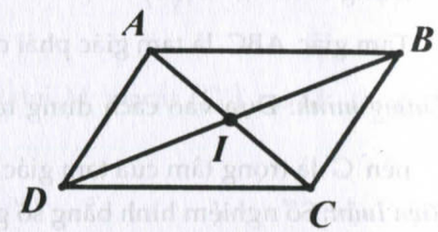
$\Leftrightarrow (6-6a)x'^2+(12a^2-12a)x'-8a^3+12a^2+2b-6=0, \forall x'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-6a=0 \\ 12a^2-12a=0 \\ -8a^3+12a^2+2b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$

Vậy $I(1;1)$ là tâm đối xứng của (C).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Lời giải



Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng là I. Vì qua phép biến hình đỉnh của một đa giác cũng được biến thành đỉnh của đa giác nên đỉnh A có thể được biến thành A,B,C hay D.

- Nếu đỉnh A được biến thành chính nó thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}=\vec{0} \Leftrightarrow I\equiv A$ vô lí
- Nếu A biến thành B (hoặc D) thì I là trung điểm của AB (hoặc I là trung điểm của AD) cũng vô lí.

Vậy A được biến thành C, lí luận tương tự thì B chỉ được biến thành D, vì vậy I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

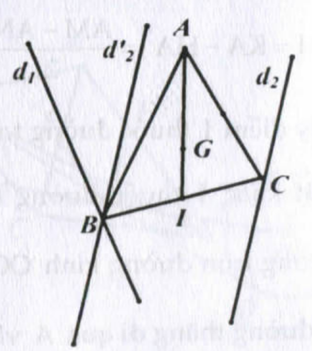
Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Đ_I$ nào đó.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng d_1,d_2 và hai điểm A,G không thuộc d_1,d_2. Hãy dựng tam giác ABC có trọng tâm G và hai đỉnh B,C lần lượt thuộc d_1 và d_2.

Lời giải

Phân tích:



Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán

Gọi I là trung điểm của BC thì $Đ_I(C)=B$ mà $C\in d_2$ nên $B\in d_2'$ với d_2' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I. Lại có $B\in d_1 \Rightarrow B=d_1\cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$
- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $Đ_I$
- Gọi $B = d_1 \cap d_2'$
- Dựng điểm $C = Đ_I(B)$

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh: Dựa vào cách dựng ta có I là trung điểm của BC và $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

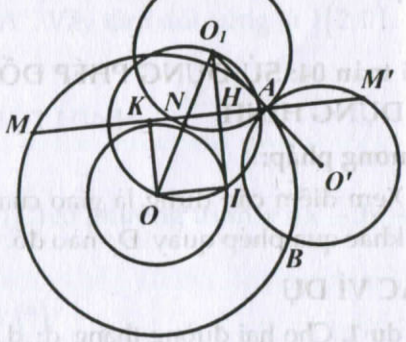
Biện luận: Số nghiệm hình bằng số giao điểm của d_1 và d_2'.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B và số $a > 0$. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt hai đường tròn thành hai dây cung mà hiệu độ dài bằng a.

Lời giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) và (O') tại M, M' sao cho $AM - AM' = a$ (giả sử $AM > AM'$).



Xét phép đối xứng $Đ_A$

Gọi $N = Đ_A(M), (O_1) = Đ_A((O))$, H, K lần lượt là trung điểm của AN và AM, khi đó $HO_1 \perp AM$ và $OK \perp AM$.

Gọi I là hình chiếu của O trên O_1H, ta có $OI // = KH$, mặt khác

$$KH = KA - HA = \frac{AM - AN}{2} = \frac{AM - AM'}{2} = \frac{a}{2} \text{ nên } OI = \frac{a}{2}.$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{a}{2}$.

Mặt khác I thuộc đường tròn đường kính OO_1 nên I là giao điểm của đường tròn đường kính OO_1 với đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$ do đó I xác định và d là đường thẳng đi qua A và song song với OI.

Cách dựng:

- Dựng (O_1) ảnh của (O) qua $Đ_A$.
- Dựng đường tròn đường kính OO_1.
- Dựng đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$, và dựng giao điểm I của đường tròn đường kính OO_1 với đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$.
- Từ A dựng đường thẳng $d // OI$ cắt (O) tại M và cắt (O') tại M' thì d là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AN, AM ta có $KH = OI = \frac{a}{2}$

Mà $KH = AK - AH = \frac{AM}{2} - \frac{AN}{2} = \frac{AM - AM'}{2} \Rightarrow AM - AM' = a.$

Biện luận : Số nghiệm hình bằng số giao điểm của đường tròn $\left(O; \frac{a}{2}\right)$ và đường tròn đường kính OO_1.

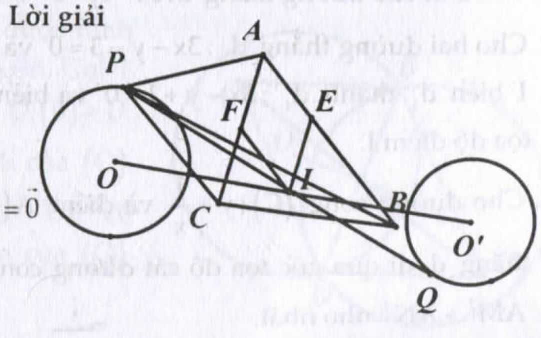
Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường tròn (O). Trên AB lấy điểm E sao cho $BE = 2AE$, F là trung điểm của AC và I là đỉnh thứ tư của hình bình hành AEIF. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O), ta dựng điểm Q sao cho $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp điểm Q khi P thay đổi trên (O)

Lời giải

Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.



Khi đó

$\overrightarrow{KA} + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}\right) + 3\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

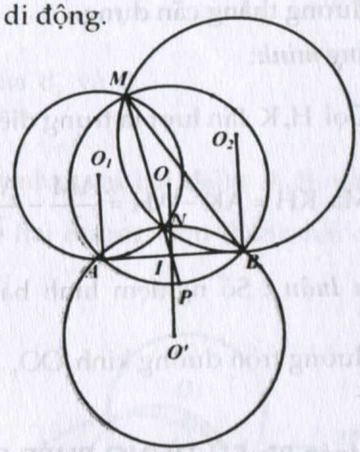
Mặt khác AEIF là hình bình hành nên $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên $K\equiv I$.

Từ giả thiết suy ra $6\overrightarrow{PK}+\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}\right)=6\overrightarrow{IQ}\Leftrightarrow\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{IQ}$, hay $\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{IQ}$.

Vậy $Đ_I(P)=Q$ mà P di động trên đường tròn (O) nên Q di động trên đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng với A,B. Hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cùng đi qua M và tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Tìm tập hợp điểm N khi M di động.

Lời giải



Gọi $I=MN\cap AB$, ta có $IA^2=IM.IN$ (1)

Tương tự $IB^2=IM.IN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IA=IB$ nên I là trung điểm của AB.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với đường tròn (O).

Dễ thấy $P_{I/(O)}=-IM.IP=-IA.IB=-IA^2$

Do đó $-IM.IN=-IM.IP\Rightarrow IN=IP$ vậy I là trung điểm của NP do đó $Đ_I(P)=N$, mà P di động trên đường tròn (O) nên N di động trên đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Vậy tập hợp điểm N là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

21. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ qua phép đối xứng tâm $I(-1;2)$.

22. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x-y-3=0$ và $d_2: x+y=0$. Phép đối xứng tâm I biến d_1 thành $d_1': 3x-y+1=0$ và biến d_2 thành $d_2': x+y-6=0$. Tìm tọa độ điểm I.

23. Cho đường cong $(C): y=\frac{1}{x}$ và điểm $A(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ cắt đường cong (C) tại hai điểm M,N sao cho AM^2+AN^2 nhỏ nhất.

24. Trên các cạnh AB,BC,CD,DA của hình bình hành ABCD lấy các điểm A',B',C',D' sao cho $A'B'C'D'$ cũng là hình bình hành. Chứng minh hai hình bình hành đó có cùng tâm.

25. Cho hai điểm A,C và đường tròn (O). Dựng hình bình hành ABCD có hai đỉnh B,D thuộc (O).

26. Cho hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N sao cho A là trung điểm của MN.

27. a) Cho góc xOy và một điểm A thuộc miền trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng qua A cắt Ox,Oy theo thứ tự tại M,N sao cho A là trung điểm của MN.

b) Chứng minh một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox,Oy lần lượt tại C,D thì luôn có $S_{OCD}\ge S_{OMN}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

21. $d': 3x-4y+17=0$.

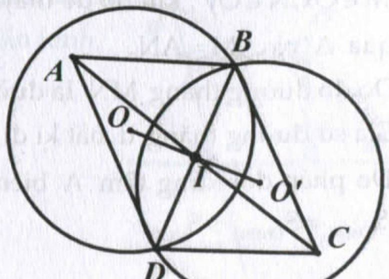
22. $I\left(\frac{1}{4};\frac{11}{4}\right)$.

23. Dễ thấy nếu d cắt (C) tại $M(x;y)$ thì d cũng cắt (C) tại $N\left(-x;-\frac{1}{y}\right)$ và ngược lại nên M,N đối xứng qua O (vì d và (C) chỉ có tối đa là 2 điểm chung). Gọi $B(2;-3)$ đối xứng với A qua O.

Ta có $AM^2+AN^2=MA^2+MB^2=2\left(x^2+y^2\right)+56$, lại có $x^2+y^2\ge 2xy=2$ nên $MA^2+MB^2\ge 60$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ hoặc $x=y=-1$ suy ra $d: y=x$.

24. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, chứng minh $Đ_O: A'\mapsto C', B'\mapsto D'$ ta được O cũng là tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

25. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình bình hành thỏa yêu cầu bài toán. Gọi I là trung điểm của AC thì $Đ_I(B)=D$ mà $B\in(O)$ nên $D\in(O')$ ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I. Lại có $D\in(O)$ nên D là giao điểm của (O) và (O').

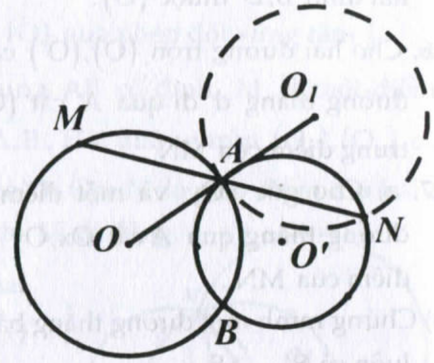


Cách dựng:

- Dựng đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.
- Dựng giao điểm D của (O) và (O'), khi đó B cũng là giao điểm của (O) và (O').

Bạn đọc tự chứng minh và biện luận.

26. Giả sử đã dựng được đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét phép đối xứng tâm $Đ_A$ ta có $Đ_A(M) = N$ mà $M \in (O)$ nên $N \in (O_1)$ ảnh của (O) qua phép đối xứng $Đ_A$. Mặt khác $N \in (O')$ nên N là giao điểm của (O') và (O_1).



Từ bước phân tích trên ta có cách dựng:

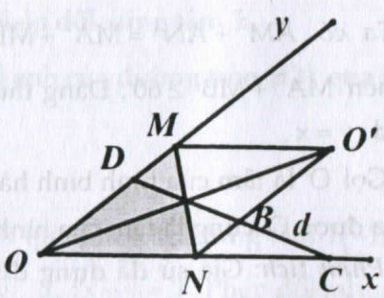
- Dựng đường tròn (O') đối xứng với (O) qua A
- Dựng giao điểm N của (O_1) và (O').
- Dựng đường thẳng d đi qua A, N cắt (O) tại M.

d chính là đường thẳng cần dựng.

27.

a) Giả sử đã dựng được M, N thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi O' là ảnh của (O) qua phép đối xứng $Đ_A$. Khi đó tứ giác $OMO'N$ là hình bình hành. Từ đó suy ra cách dựng:



- Dựng O' là ảnh của (O) qua $Đ_A$.
- Dựng hình bình hành $OMO'N$ sao cho $M \in Ox, N \in Oy$, khi đó dễ thấy MN đi qua A và $AM = AN$.

Do đó đường thẳng MN là đường thẳng cần dựng.

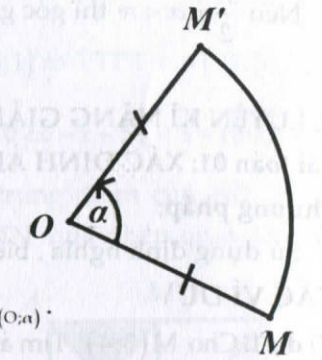
b) Giả sử đường thẳng d bất kì đi qua A cắt $O'M, Ox, Oy$ lần lượt tại B, C, D.

Do phép đối xứng tâm A biến tam giác ABM thành tam giác ADN nên $S_{OMN} = S_{OMBD} \le S_{OCD}$.

Phép quay

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:



Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM;OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O, α được gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc quay α được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

Nhận xét

- Khi $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đối xứng tâm O.
- Khi $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đồng nhất.

2. Biểu thức tọa độ của phép quay:

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $M(x;y)$ và $M'(x';y') = Q_{(O,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

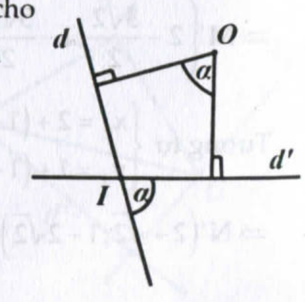
Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $M(x;y)$, $I(a;b)$ và $M'(x';y') = Q_{(I,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

3. Tính chất của phép quay:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

Lưu ý:



Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d', khi đó

Nếu $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng α

Nếu $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\pi - \alpha$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP QUAY.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa , biểu thức tọa độ và các tính chất của phép quay

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $M(3;4)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 30^0.

Lời giải

Gọi $M'(x';y') = Q_{(O;30^0)}$. Áp dụng biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} x' = 3\cos 30^0 - 4\sin 30^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \\ y' = 3\sin 30^0 + 4\cos 30^0 = \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2; \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

Ví dụ 2. Cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I;45^0)}$.

Lời giải

Lấy hai điểm $M(-2;0); N(1;-2)$ thuộc d.

Gọi $M'(x_1;y_1), N'(x_2;y_2)$ là ảnh của M,N qua $Q_{(I;45^0)}$

Ta có $\begin{cases} x_1 = 2 + (-2-2)\cos 45^0 - (0-1)\sin 45^0 \\ y_1 = 1 + (-2-2)\sin 45^0 + (0-1)\cos 45^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_1 = 1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M'\left(2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; 1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

Tương tự $\begin{cases} x_2 = 2 + (1-2)\cos 45^0 - (-2-1)\sin 45^0 \\ y_2 = 1 + (1-2)\sin 45^0 + (-2-1)\cos 45^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{2} \\ y_2 = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

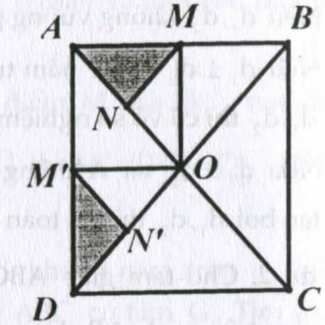
$\Rightarrow N'(2 + \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2})$.

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(5;1)$.

Gọi $d' = Q_{(I;45^0)}(d)$ thì d' có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{M'N'} = (5;1) \Rightarrow$ VTPT $\vec{n} = (-1;5)$

Phương trình: $d': -(x - 2 - \sqrt{2}) + 5(y - 1 + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow -x + 5y - 3 + 10\sqrt{2} = 0$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc quay 90^0.



Lời giải

Phép quay $Q_{(O;90^0)}$ biến A thành D, biến M thành M' là trung điểm của AD, biến N thành N' là trung điểm của OD. Do đó nó biến tam giác AMN thành tam giác DM'N'.

Bài toán 02: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho điểm A và hai đường thẳng d_1, d_2. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A sao cho $B \in d_1, C \in d_2$.

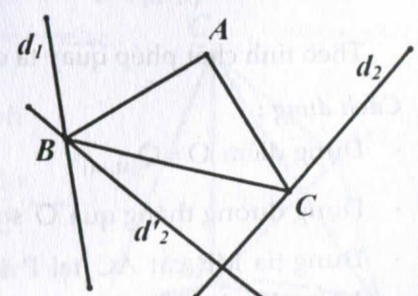
Lời giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có thể giả sử $(AB, AC) = 90^0$, khi đó $Q_{(A;-90^0)}(C) = B$, mà $C \in d_2$ nên $B \in d_2'$ với $d_2' = Q_{(A;-90^0)}(d_2)$.

Lại có $B \in d_1$ nên $B = d_1 \cap d_2'$.



Cách dựng:

- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $Q_{(A;-90^0)}$.

- Dựng giao điểm $B = d_1 \cap d_2'$.
- Dựng đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt d_2 tại C.

Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh:

Từ cách dựng suy ra $Q_{(A;90^0)}(B) = C$ nên $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 90^0$ do đó tam giác ABC vuông cân tại A.

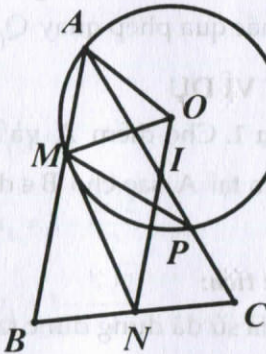
Biện luận:

- Nếu d_1, d_2 không vuông góc thì có một nghiệm hình.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi d_1, d_2 thì có vô số nghiệm hình.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A không nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi d_1, d_2 thì bài toán vô nghiệm hình.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $(AB, AC) = \alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$ và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng CB, CA các điểm N, P sao cho $MN = MP$ và đường tròn (AMP) tiếp xúc với MN.

Lời giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được các điểm N, P sao cho $N \in BC, P \in AC$ sao cho $MN = MP$ và đường tròn (AMP) tiếp xúc với MN. Khi đó do MN tiếp xúc với đường tròn (AMP) nên $\widehat{PMN} = \widehat{A} = \alpha$. Từ đó ta có $(MP; MN) = -\alpha$ lại có $MP = MN$ nên $Q_{(M,-\alpha)}(P) = N$.



Giả sử $O = Q_{(M,-\alpha)}(A)$ và $I = ON \cap AC$.

Theo tính chất phép quay ta có $\widehat{NIC} = (ON, AP) = \alpha \Rightarrow \widehat{NIC} = \widehat{BAC} \Rightarrow IN \,//\, AB$.

Cách dựng:

- Dựng điểm $O = Q_{(M,-\alpha)}$
- Dựng đường thẳng qua O song song với AB cắt BC tại N
- Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $\widehat{NMP} = \alpha$

Như vậy các điểm N, P là các điểm cần dựng.

Chứng minh:

Vì $ON \,//\, AB$ nên $\widehat{AMO} = \widehat{MON} = \alpha \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{MAP} = \alpha$ suy ra đường tròn (AMN) tiếp xúc với MN. Ta có $Q_{(M;-\alpha)}: MP \to MN$ nên $MP = MN$.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

Bài toán 03: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó.

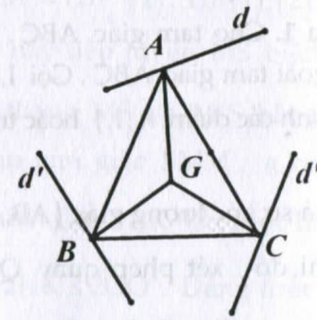
Để tìm tập hợp điểm M' ta đi tìm tập hợp điểm M mà $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó biến điểm M thành điểm M', khi đó nếu $M \in (H)$ thì $M' \in (H') = Q_{(I;\alpha)}((H))$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng d và một điểm G không nằm trên d. Với mỗi điểm A nằm trên d ta dựng tam giác đều ABC có tâm G. Tìm quỹ tích các điểm B, C khi A di động trên d.

Lời giải

Do tam giác ABC đều và có tâm G nên phép quay tâm G góc quay 120^0 biến A thành B hoặc C và phép quay tâm G góc quay 240^0 biến A thành B hoặc C. Mà $A \in d$ nên B, C thuộc các đường thẳng là ảnh của d trong hai phép quay nói trên.

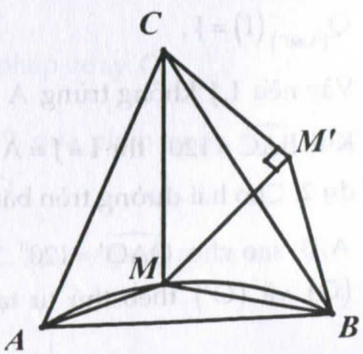


Vậy quỹ tích các điểm B, C là các đường thẳng ảnh của d trong hai phép quay tâm G góc quay 120^0 và 240^0.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp điểm M mằn trong tam giác ABC sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Lời giải

Xét phép quay $Q_{(B;-60^0)}$ thì A biến thành C, giả sử điểm M biến thành M', khi đó $MA = M'C, MB = MM'$ nên $MA^2 + MB^2 = MC^2$ $\Leftrightarrow M'C^2 + MM'^2 = MC^2$ do đó tam giác $M'MC$ vuông tại M' suy ra $\widehat{BM'C} = 150^0$.



Lại có $AM = CM'$, $BM = BM'$ và $AB = BC \Rightarrow \Delta AMB = \Delta CM'B$ $(c-c-c)$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{CM'B} = 150^0$. Vậy M thuộc cung chứa góc 150^0 với dây cung AB nằm trong tam giác ABC.

Đảo lại lấy điểm M thuộc cung $\widehat{AB} = 150^0$ trong tam giác ABC, gọi $M' = Q_{(B;-60^0)}(M)$.

Do $Q_{(B;-60^0)}: AMB \to CM'B$ nên $\widehat{CM'B} = 150^0$. Mặt khác tam giác BMM' đều nên $\widehat{BM'M} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CM'M} = 150^0 - 60^0 = 90^0$ vì vậy $\Delta M'MC$ vuông tại $M' \Rightarrow M'B^2 + M'C^2 = MC^2$, mà $MA = M'C, MB = MM'$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Vậy tập hợp điểm M thỏa yêu cầu bài toán là cung $\widehat{AB} = 150^0$ trong tam giác ABC nhận AB làm dây cung.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI TOÁN.

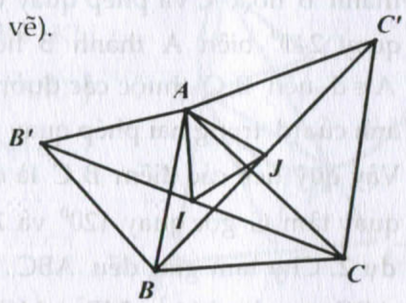
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Vẽ các tam giác đều ABB' và ACC' nằm phía ngoài tam giác ABC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CB' và BC'. Chứng minh các điểm A, I, J hoặc trùng nhau hoặc tạo thành một tam giác đều.

Lời giải

Giả sử góc lượng giác $(AB, AC) > 0$ (hình vẽ).

Khi đó, xét phép quay $Q_{(A;60^0)}$. Ta có



$Q_{(A;60^0)}: B' \mapsto B, C \mapsto C'$

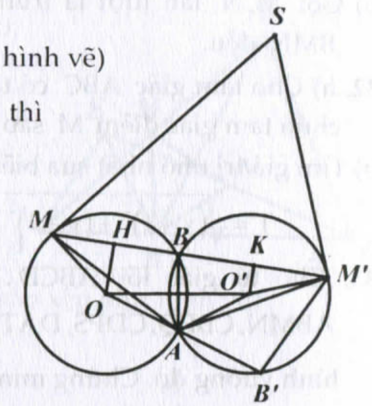
$Q_{(A;60^0)}: B'C \mapsto BC'$ mà I, J lần lượt là trung điểm của B'C và BC' nên $Q_{(A;60^0)}(I) = J$.

Vậy nếu I, J không trùng A thì ΔAIJ đều.

Khi $\widehat{BAC} = 120^0$ thì $I \equiv J \equiv A$.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{OAO'} = 120^0$. Đường thẳng d đi qua B cắt hai đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại M, M' sao cho M nằm ngoài (O') còn M' nằm ngoài (O). Gọi S là giao điểm của các tiếp tuyến với hai đường tròn tại M và M'. Xác định vị trí của M, M' sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SMM' lớn nhất.

Lời giải



Giả sử góc lượng giác $(AO', AO) = 120^0$ (như hình vẽ)

Xét phép quay $Q_{(A;-120^0)}$. Gọi $B' = Q_{(A;-120^0)}(B)$ thì $\widehat{BAB'} = 120^0$. Dễ thấy $\widehat{OAB} = 60^0$ suy ra $\widehat{OAB} + \widehat{BAB'} = 180^0$ nên O, A, B' thẳng hàng.

Ta có $\widehat{MBA} + \widehat{ABM'} = 180^0$,

$\widehat{ABM'} + \widehat{AB'M'} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{AB'M'}$.

Mà $(O;R)$ và $(O';R')$ bằng nhau nên $AM = AM'$ (1); từ đó ta có $\Delta OAM = \Delta O'AM' \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{O'AM'}$

$\Rightarrow \widehat{O'AM} + \widehat{O'AM} = \widehat{OAM} + \widehat{O'AM} = 120^0$ hay $\widehat{MAM'} = 120^0$ (2). Từ $(1);(2)$ suy ra $Q_{(A;-120^0)}(M) = M'$. Do đó trong phép quay này tiếp tuyến MS biến thành tiếp tuyến M'S nên góc tù giữa hai đường thẳng MS và M'S bằng 120^0 do đó $\widehat{MSM'} = 60^0$. Áp dụng định lí sin cho tam giác SMM' ta có $R = \frac{MM'}{2\sin 60^0} = \frac{MM'}{\sqrt{3}} \Rightarrow R$ lớn nhất khi MM' lớn nhất.Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O, O' trên MM' thì ta có $MM' = 2HK \le 2OO'$. Đẳng thức xảy ra khi $MM' // OO'$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SMM' lớn nhất khi M, M' là các giao điểm thứ hai của đường thẳng d đi qua B và song song với OO' với hai đường tròn.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

28. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 5x - 3y + 15 = 0$ qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$.

29. Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ qua phép quay $Q_{(I;90^0)}$ với $I(3;4)$.

30. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1;2), B(3;4)$ và $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

31. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

a) Chứng minh $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^0.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AF và EC, chứng minh tam giác BMN đều.

32. a) Cho tam giác ABC có tất cả các góc nhỏ hơn 120^0. Tìm trên mặt phẳng chứa tam giác điểm M sao cho tổng $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$$

33. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Vẽ phía ngoài tam giác dựng 4 hình vuông $ABMN, CBPQ, CDPS, DATU$. Gọi $O_i\left(i = \overline{1,4}\right)$ theo thứ tự là tâm của các hình vuông đó. Chứng minh $O_1O_3 \perp O_2O_4$ và $O_1O_3 = O_2O_4$

34. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Trên các cạnh BC, CD lấy các điểm M, N. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên các đường thẳng AM, AN; các điểm I, J lần lượt là hình chiếu của D lên AM, AN. Chứng minh

a) Xác định ảnh của ΔBAF và ΔBAE qua $Q_{(O,90^0)}$.

b) $EF \perp IJ$.

35. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M thuộc miền trong góc đó. Tìm trên Ox, Oy các điểm A, B sao cho $OA = OB$ và $MA + MB$ nhỏ nhất.

36. Cho hai đường tròn đồng tâm, hãy dựng hình vuông sao cho hai đỉnh liên tiếp của nó nằm trên một đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn thứ hai.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

28. $d' \perp d$ nên phương trình có dạng $3x + 5y + c = 0$

Lấy $M(-3;0) \in d$, ta có:

$Q_{(0;90^0)}(M) = M'(0;-3)$, $M' \in d' \Rightarrow C = 15$, hay $d': 3x + 5y + 15 = 0$.

29. (C) có tâm $J(1;-2), R = 3$, gọi $J'(x';y') = Q_{(I;90^0)}(I)$ ta có

$$\begin{cases} x' = 3 + (1-3)\cos\dfrac{\pi}{2} - (4+2)\sin\dfrac{\pi}{2} = -3 \\ y' = 4 + (1-3)\sin\dfrac{\pi}{2} + (4+2)\cos\dfrac{\pi}{2} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow J'(-3;2)$ mà $R' = R = 3$ nên phương trình $(C'): (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$.

30. Sử dụng tính chất: Phép quay tâm $I(a;b) \in d: Ax + By + C = 0$ góc quay α biến d thành d' có phương trình:

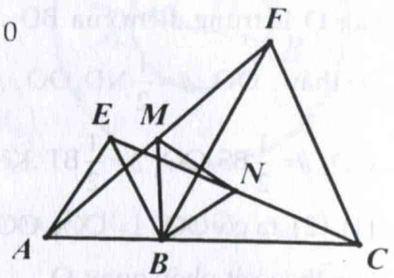
$$(A - B\tan\alpha)(x-a) + (A\tan\alpha + B)(y-b) = 0.$$

Ta được $AC: 3x - y - 1 = 0, BC: x - 2y + 5 = 0$

31. a) $Q_{(B;60^0)}(EC) = AF$

$\Rightarrow EC = AF$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^0.

b) $Q_{(B,60^0)}(N) = M \Rightarrow \Delta BMN$ đều.



32. a) Giả sử tam giác ABC có các điểm được sắp xếp như hình vẽ

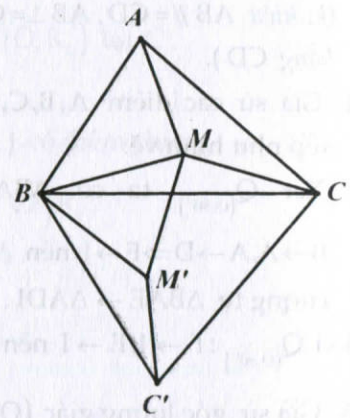
Xét phép quay $Q_{(B;-60^0)}$, giả sử

$Q_{(B;-60^0)}: M \to M', C \to C'$ thế thì $\Delta MBM'$ đều nên $BM = MM'$. Tương tự $MC = M'C'$ do đó:

$MA + MB + MC = AM + MM' + M'C' \geq AC'$

Vậy $\min(MA + MB + MC) = AC'$ khi A, M, M', C' thẳng hàng, khi đó ta dễ dàng kiểm tra được:

$\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 120^0$.



Hay điểm M nhìn ba cạnh dưới các góc 120^0.

(*Điểm* M *này được gọi là điểm Toricelli*)

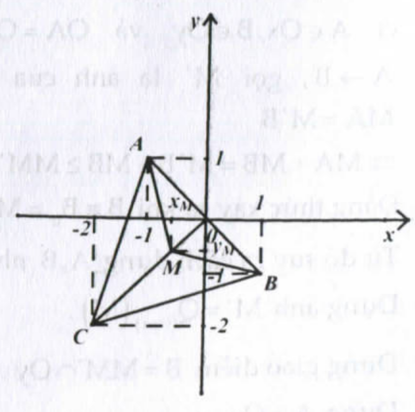
b) Trong mp Oxy xét các điểm

$A(-1;1), B(1;-1), C(-2;-2), M(x;y)$ thì

$T = MA + MB + MC$.

Tam giác ABC cân tại C và thỏa mãn điều kiện của câu a) từ đó dễ dàng tìm được $\min T = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ khi:

$$M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



33. Xét phép quay $Q_{(A;90^0)}$. Ta có $BT \to ND \Rightarrow BT = ND$ và $BT \perp ND$ (1).

Xét phép quay $Q_{(C;-90^0)}$ ta có $BS \to PD \Rightarrow BS = PD$ và $BS \perp PD$ (2).

Gọi O là trung điểm của BD.

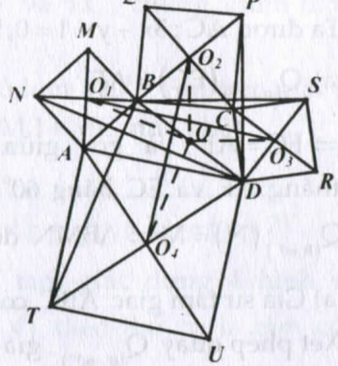
Dễ thấy: $OO_1 \,//\!= \frac{1}{2}ND, OO_2 \,//\!= \frac{1}{2}PD$,

$OO_3 \,//\!= \frac{1}{2}BS, OO_4 \,//\!= \frac{1}{2}BT$. Kết hợp với

(1),(2) ta có $OO_1 \perp\!= OO_4, OO_2 \perp\!= OO_3$,

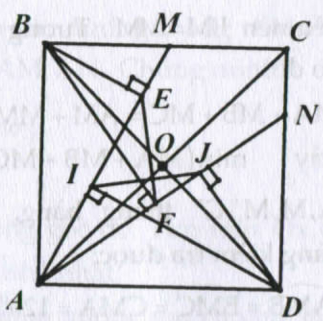
tiếp theo xét phép quay $Q_{(O;90)}$ ta có

$O_1O_3 \to O_2O_4 \Rightarrow O_1O_3 \perp\!= O_2O_4$



(*kí hiệu* $AB \,//\!= CD$, $AB \perp\!= CD$ *là* AB *song song bằng* CD, AB *vuông góc và bằng* CD).

34. Giả sử các điểm A, B, C, D được sắp xếp như hình vẽ:



a) Xét $Q_{(O;90^0)}$ ta có $\Delta BAE = \Delta ADJ$ và

$B \to A, A \to D \Rightarrow F \to J$ nên $\Delta BAE \to \Delta ADJ$.

Tương tự $\Delta BAE \to \Delta ADI$.

b) vì $Q_{(O;90^0)}: F \to J, E \to I$ nên $EF \perp IJ$.

35. Giả sử góc lượng giác $(Ox, Oy) = \alpha$.

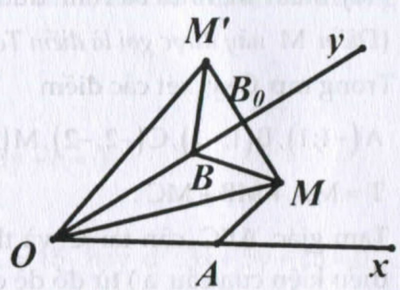
Xét $Q_{(O,\alpha)}$ thì $Ox \to Oy$

vì $A \in Ox, B \in Oy$ và $OA = OB$ nên

$A \to B$, gọi M' là ảnh của M thì

$MA = M'B$

$\Rightarrow MA + MB = M'B + MB \ge MM'$

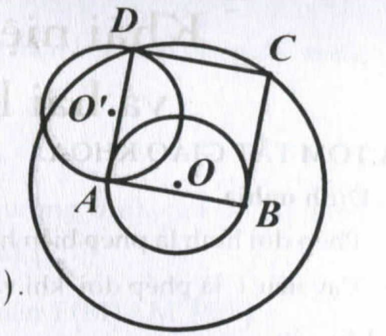


Đẳng thức xảy ra khi $B \equiv B_0 = MM' \cap Oy$

Từ đó suy ra cách dựng A, B như sau:

- Dựng ảnh $M' = Q_{(O;\alpha)}(M)$.
- Dựng giao điểm $B = MM' \cap Oy$.
- Dựng $A = Q_{(O;-\alpha)}$.

36. Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD có hai đỉnh $A, B \in (O; R_1)$ và hai đỉnh $C, D \in (O; R_2)$ với $R_2 > R_1$



Khi đó $Q_{(A;90^0)}: B \to D$, mà $B \in (O; R_1)$ nên

$D \in (O'; R_1)$ ảnh của $(O; R_1)$ qua $Q_{(A;90^0)}$.

Mặt khác $D \in (O; R_2) \Rightarrow D \in (O; R_2) \cap (O'; R_1)$.

Từ đây ta có cách dựng .

- Dựng đường tròn $(O'; R_1)$ ảnh của đường tròn $(O; R_1)$ qua $Q_{(A;90^0)}$.
- Dựng giao điểm D của $(O'; R_1)$ và $(O; R_2)$.
- Dựng điểm B ảnh của D qua $Q_{(A;-90^0)}$.
- Kẻ đường thẳng qua B song song với AB cắt $(O; R_2)$ tại C.

Hình vuông ABCD là hình vuông cần dựng.

Bài toán có nghiệm hình khi $(O'; R_1)$ và $(O; R_2)$ có điểm chung

$\Leftrightarrow OO' \ge R_2 - R_1 \Leftrightarrow \sqrt{2}R_1 \ge R_2 - R_1 \Leftrightarrow R_2 \le (1+\sqrt{2})R_1$.

Khái niệm phép dời hình và hai hình bằng nhau

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

- Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Vậy nếu f là phép dời khi và chỉ khi $f(M)f(N) = MN$.

Nhận xét:

- Các phép biến hình : Tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay là các phép dời hình.
- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình thì cũng được một phép dời hình.

2. Tính chất của phép dời hình.

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa ba điểm đó.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó , biến một góc thành góc bằng góc đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Định nghĩa hai hình bằng nhau.

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình f biến hình này thành hình kia.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP DỜI HÌNH.

Phương pháp:

Dùng định nghĩa, biểu thức tọa độ và các tính chất của các phép dời hình cụ thể (tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay) có trong bài toán.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $d: 3x + y + 3 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I(1;2)$ và phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v} = (-2;1)$.

Lời giải

Gọi $F = T_{\vec{v}} \circ Đ_I$ là phép dời hình bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Gọi $d_1 = Đ_I(d), d' = T_{\vec{v}}(d_1) \Rightarrow d' = F(d)$.

Do d' song song hoặc trùng với d do đó phương trình của d' có dạng $3x + y + c = 0$. Lấy $M(0;-3) \in d$ ta có $Đ_I(M) = M'(2;7)$.

Lại có $T_{\vec{v}}(M') = M''(2 + (-2); 7 + 1) \Rightarrow M''(0;8)$ nên $F(M) = M''(0;8)$.

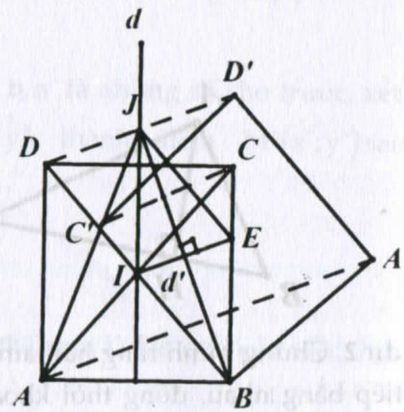
Mà $M'' \in d' \Rightarrow 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$. Vậy $d': 3x + y - 8 = 0$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD có tâm I. Trên tia BC lấy điểm E sao cho $BE = AI$.

a) Xác định một phép dời hình biến A thành B và biến I thành E.

b) Dựng ảnh của hình vuông ABCD qua phép dời hình này.

Lời giải



a) Gọi f là phép đối xứng qua đường trung trực d của AB, g là phép đối xứng qua đường trung trực d' của IE. Khi đó f biến AI thành BI và g biến BI thành BE. Từ đó phép dời hình $\delta = g \circ f$ biến AI thành BE do đó $\delta(A) = B, \delta(I) = E$.

Mặt khác phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục cắt nhau tại J là phép quay tâm J góc quay $\alpha = 2(d;d') = 2(JI;JB)$ $= (JI;JE) = 45^0$ (do $JE \parallel IB$).

Vậy phép dời hình này chính là $Q_{(J;45^0)}$.

b) f biến các điểm A, B, C, D thành các điểm B, A, D, C, g biến các điểm B, A, D, C thành các điểm B, A', D', C'. Do đó δ biến các điểm A, B, C, D thành các điểm B, A', D', C'. Vậy ảnh của hình vuông ABCD là hình vuông BA'D'C' đối xứng với hình vuông BADC qua d'.

Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI HÌNH BẰNG NHAU.

Phương pháp:

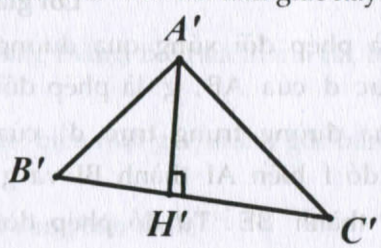
Để chứng minh hai hình bằng nhau ta cần chỉ ra một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

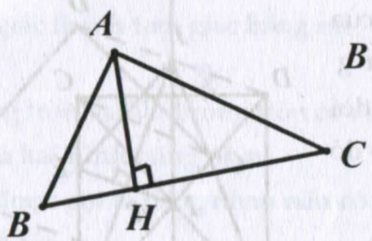
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các đường cao AH và $A'H'$ sao cho $AH = A'H', AB = A'B', AC = A'C'$ các góc A, A' đều là góc tù. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

Lời giải

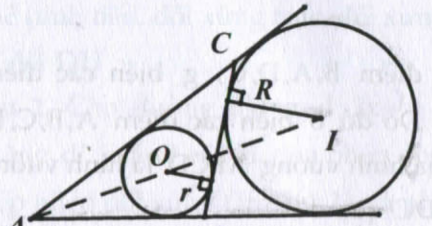
Vì các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ là các góc tù nên các góc $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{B'}, \widehat{C'}$ là các góc nhọn. Suy ra H ở giữa B và C, H' ở giữa B' và C'. Vì hai tam giác vuông ABH và $A'B'H'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến A, B, H lần lượt thành các điểm A', B', H'. Khi đó C biến thành C'. Vậy phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nên hai tam giác này bằngnhau.

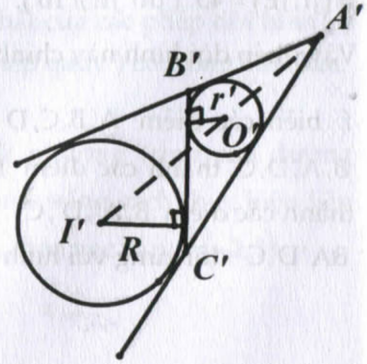




Ví dụ 2. Chứng minh rằng hai tam giác bằng nhau nếu có các đường tròn nội tiếp bằng nhau, đồng thời khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của hai tam giác đó cũng bằng nhau.

Lời giải





Giả sử $(O;r), (I;R)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tâm đường tròn bàng tiếp góc A; tam giác $A'B'C'$ có đường tròn nội tiếp $(O';r)$ và đường tròn bàng tiếp góc A' là $(I';R')$ và $OI = O'I'$.

Vì $OI = O'I'$ nên tồn tại phép dời hình $F: O \mapsto O', I \mapsto I'$ khi đó $F:(O;r) \mapsto (O';r), (I;R) \mapsto (I';R)$. Mặt khác F biến cặp tiếp tuyến chung ngoài AB và AC của (O) và (I) thành cặp tiếp tuyến chung ngoài $A'B'$ và $A'C'$ của (O') và (I')(hoặc $A'C'$ và $A'B'$) còn tiếp tuyến BC phải biến thành tiếp tuyến $B'C'$ suy ra $F: \Delta ABC \mapsto \Delta A'B'C'$ hoặc $F: \Delta ABC \mapsto \Delta A'C'B'$, hay hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

37. Cho đường thẳng $d: 2x + y = 0$ và $\vec{v} = (3;-1)$. Tìm ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^o)}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với a, b, α là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}.$$

Chứng minh F là một phép dời hình.

39. Chứng minh rằng mỗi phép quay có thể xem là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục.

40. Chứng minh rằng nếu thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm I_1, I_2 ta được kết quả là một phép tịnh tiến theo $\vec{v} = 2\overrightarrow{I_1I_2}$.

41. Chứng minh nếu thực hiện liên tiếp hai phép quay cùng tâm $Q_{(O;\varphi_1)}, Q_{(O;\varphi_2)}$ thì ta được kết quả là một phép quay $Q_{(O;\varphi_1+\varphi_2)}$.

42. Cho đường tròn (O), một điểm P cố định và một đoạn thẳng $AB = a$ cố định. Với mỗi điểm M thuộc (O) ta dựng hình bình hành $ABNM$ và gọi Q là điểm đối xứng của N qua P. Tìm tập hợp điểm Q khi M thay đổi trên đường tròn.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

37. Đặt $F = T_{\vec{v}} \circ Q_{(O;90^0)}$ P là phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^0)}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Gọi $d' = F(d)$.

Thì $d' \perp d \Rightarrow d' : x - 2y + c = 0$. Lấy $O(0;0) \in d$

$\Rightarrow F(O) = T_{\vec{v}} \circ Q_{(O;90^0)}(O) = T_{\vec{v}}(O) = O'(3;-1)$.

$O' \in d' \Rightarrow c = -5$. Vậy $F(d) = d' : x - 2y - 5 = 0$.

38. Vì F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ có tọa độ

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

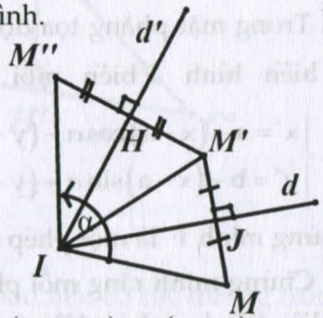
Ta có $M'N' = \sqrt{(x_{N'} - x_{M'})^2 + (x_{N'} - x_{M'})^2}$

$= \sqrt{((x_N - x_M)\cos\alpha - (y_N - y_M)\sin\alpha)^2 + ((x_N - x_M)\sin\alpha - (y_N - y_M)\cos\alpha)^2}$

$= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = MN$

Vậy $F(MN) = M'N' = MN$ nên F là phép dời hình.

39. Xét phép quay $Q_{(I;2\phi)}$. Lấy đường thẳng d bất kì đi qua I, gọi d' là ảnh của d qua $Q_{(I;\phi)}$. Gọi M' đối xứng với M qua d, M'' đối xứng với M' qua d' và. Gọi $J = d \cap MM', H = d' \cap M'M''$, theo hệ thức Sa lo ta có



$(IM, IM'') = (IM, IM') + (IM', IM'') = 2(IJ, IM') + 2(IM', IH) = 2(IJ, IH) = 2\phi$

Lại có $IM'' = IM' = IM$ do đó $(IM, IM'') = 2\phi$ và $IM'' = IM$ nên $Q_{(I,2\phi)}(M) = M''$.

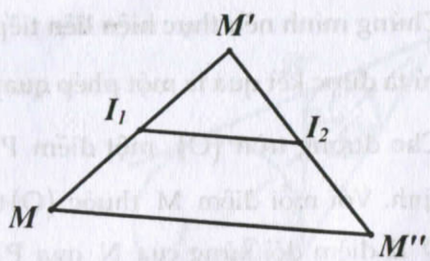
Vậy $Q_{(I,2\phi)} = Đ_{d'} \circ Đ_d$.

40. Xét các phép đối xứng tâm I_1, I_2.

Lấy điểm M bất kì.

Gọi $M' = Đ_{I_1}(M), M'' = Đ_{I_2}(M')$

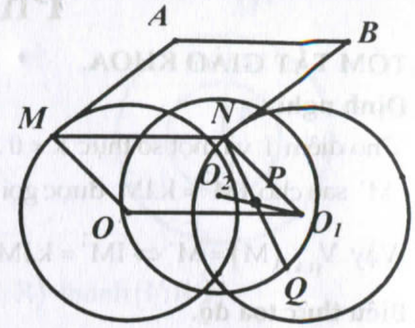
ta có $\begin{cases} \overrightarrow{I_1M'} = -\overrightarrow{I_1M} \\ \overrightarrow{I_2M''} = -\overrightarrow{I_2M'} \end{cases}$



$\Rightarrow I_1$ là trung điểm của MM' và I_2 là trung điểm của M'M'' (hình vẽ)

Suy ra $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow T_{2\overrightarrow{I_1I_2}}(M) = M''$. Vậy $Đ_{I_2} \circ Đ_{I_1} = T_{2\overrightarrow{I_1I_2}}$.

41. Gọi $M' = Q_{(O;\phi_1)}(M), M'' = Q_{(O;\phi_2)}(M')$ thì ta có $OM' = OM, (OM, OM') = \phi_1$ và $OM'' = OM', (OM', OM'') = \phi_2$ suy ra $OM'' = OM$ và theo hệ thức Sa-lo ta có $(OM, OM'') = (OM, OM') + (OM', OM'') = \phi_1 + \phi_2$ hay $Q_{(O;\phi_1+\phi_2)}(M) = M''$.



Vậy $Q_{(O;\phi_2)} \circ Q_{(O;\phi_1)} = Q_{(O;\phi_1+\phi_2)}$.

42. Do ABNM là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(M) = N$, mặt khác Q đối xứng với N qua P nên $Đ_P(N) = Q$ vì vậy $Đ_P \circ T_{\overrightarrow{AB}}(M) = Q$ mà M chạy trên đường tròn (O) nên Q chạy trên đường tròn (O_2) là ảnh của (O) qua phép dời hình $F = Đ_P \circ T_{\overrightarrow{AB}}$.

Vậy quỹ tích điểm Q là đường tròn (O_2) là ảnh của (O) qua phép dời hình $F = Đ_P \circ T_{\overrightarrow{AB}}$.

Phép vị tự

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm I và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k. Kí hiệu $V_{(I;k)}$

Vậy $V_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.

2. Biểu thức tọa độ.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $I(x_0;y_0)$, $M(x;y)$, gọi $M'(x';y') = V_{(I;k)}(M)$

thì $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$.

3. Tính chất:

- Nếu $V_{(I;k)}(M) = M', V_{(I;k)}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$
- Phép vị tự tỉ số k

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$

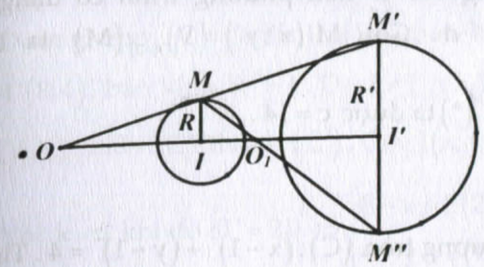
4. Tâm vị tự của hai đường tròn.

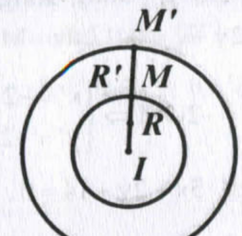
Định lí: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

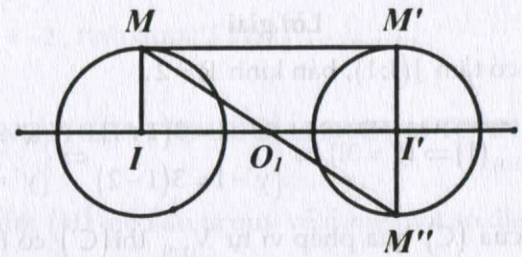
Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$

- Nếu $I \equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I;\pm\frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$.
- Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O;\frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O_1;-\frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$. Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn.





- Nếu $I \neq I'$ và $R = R'$ thì có $V_{(O_1;-1)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ.

Phương pháp:

Dùng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép vị tự.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x + 2y - 7 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Lời giải

Cách 1: Lấy $M(x;y) \in d \Rightarrow 5x + 2y - 7 = 0$ (*).

Gọi $M'(x';y') = V_{(O;-2)}(M)$. Theo biểu thức tọa độ ta có

$$\begin{cases} x' = -2x + [1-(-2)].0 \\ y' = -2y + [1-(-2)].0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' \\ y = -\frac{1}{2}y' \end{cases}.$$

Thay vào (*) ta được $-\frac{5}{2}x' - y' - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x' + 2y' + 14 = 0$

Vậy $d': 5x + 2y + 14 = 0$.

Cách 2: Do d' song song hoặc trùng với d nên phương trình có dạng : $5x + 2y + c = 0$. Lấy $M(1;1)$ thuộc d. Gọi $M'(x';y') = V_{(O;-2)}(M)$ ta có $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -2 \end{cases}$. Thay vào (*) ta được $c = 14$.

Vậy $d': 5x + 2y + 14 = 0$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số $k = 3$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $J(1;1)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $J'(x';y') = V_{(I;3)}(J) \Rightarrow \overrightarrow{IJ'} = 3\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 3(1+1) \\ y' - 1 = 3(1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 7 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow J'(7;-2)$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự $V_{(I;3)}$ thì (C') có tâm $J'(7;-2)$, bán kính $R' = 3R = 6$.

Vậy $(C'): (x-7)^2 + (y+2)^2 = 36$.

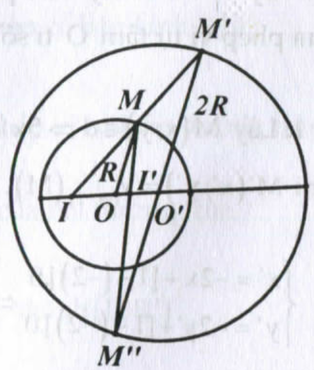
Bài toán 02: TÌM TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

Phương pháp:

Sử dụng cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong bài học.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O;R) và (O';2R) đựng nhau, với $O \neq O'$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn (O) và (O').



Lời giải

Do $O \neq O'$ và $R \neq 2R$ nên có hai phép vị tự $V_{(I;2)}$ và $V_{(I';-2)}$ biến (O;R) thành (O';2R).

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ và $(C'): (x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 2$; đường tròn (C') có tâm $I'(8;4)$, bán kính $R' = 4$. Do $I \neq I'$ và $R \neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(J';-2)}$ biến (C) thành (C'). Gọi $J(x;y)$

Với $k = 2$ khi đó $\overrightarrow{JI'} = 2\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = 2(2-x) \\ 4 - y = 2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$.

$\Rightarrow J(-4;-2)$.

Tương tự với $k = -2$, tính được $J'(4;2)$.

Bài toán 03: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.

Phương pháp:

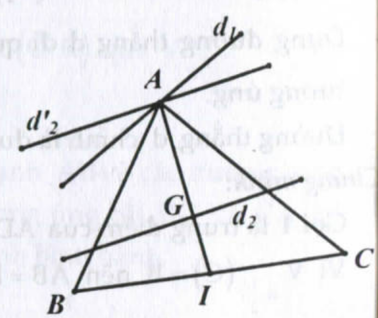
Để dựng một hình (H) nào đó ta quy về dựng một số điểm (đủ để xác định hình (H)) khi đó ta xem các điểm cần dựng đó là giao của hai đường trong đó một đường có sẵn và một đường là ảnh vị tự của một đường khác.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai điểm B, C cố định và hai đường thẳng d_1, d_2. Dựng tam giác ABC có đỉnh A thuộc d_1 và trọng tâm G thuộc d_2.

Lời giải

Phân tích:



Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi I là trung điểm của BC, theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow V_{(I;3)}(G) = A$ mà $G \in d_2 \Rightarrow A \in d_2'$

Với d_2' là ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$.

Lại có $A \in d_1 \Rightarrow A = d_1 \cap d_2'$.

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng d_2' ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$.
- Dựng giao điểm $A = d_1 \cap d_2'$.
- Dựng giao điểm $G = IA \cap d_2$.

Hai điểm A;G là hai điểm cần dựng.

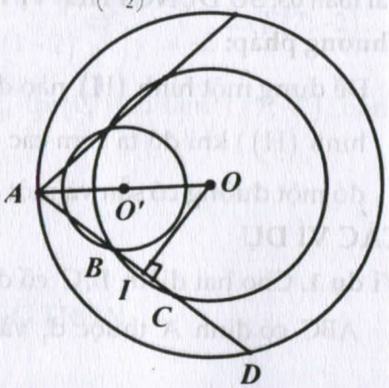
Chứng minh: Rõ ràng từ cách dựng ta có $A \in d_1, G \in d_2$; I là trung điểm của BC và $V_{(I;3)}(G) = A \Rightarrow \overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Biện luận: Số nghiệm hình bằng số giao điểm của d_1 và $d_2{}'$.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn đồng tâm (C_1) và (C_2). Từ một điểm A trên đường tròn lớn (C_1) hãy dựng đường thẳng d cắt (C_2) tại B,C và cắt (C_1) tại D sao cho $AB = BC = CD$.

Lời giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (C_1) tại D và (C_2) tại B,C sao cho $AB = BC = CD$, khi đó $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C) = B$.



Mà $C \in (C_2)$ nên $B \in (C_2{}')$ với đường tròn $(C_2{}')$ là ảnh của (C_2) qua $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$.

Lại có $B \in (C_2)$ nên $B \in (C_2) \cap (C_2{}')$.

Cách dựng

- Dựng đường tròn $(C_2{}')$ ảnh của đường tròn (C_2) qua phép vị tự $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$.
- Dựng giao điểm B của (C_2) và $(C_2{}')$.
- Dựng đường thẳng d đi qua A,B cắt các đường tròn $(C_2),(C_1)$ tại C,D tương ứng.

Đường thẳng d chính là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi I là trung điểm của AD thì I cũng là trung điểm của BC.

Vì $V_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(C) = B$ nên $AB = BC$, mặt khác AD và BC có chung trung điểm I nên $IA = ID$, $IC = IB$, $ID = CD + IC; IA = IB + AB$ suy ra $CD = AB$.

Vậy $AB = BC = CD$.

Biện luận: Gọi $R_1; R_2$ lần lượt là bán kính các đường tròn (C_1) và (C_2) ta có:

- Nếu $R_1 \ge 2R_2$ thì có một nghiệm hình.
- Nếu $R_1 < 2R_2$ thì có hai nghiệm hình.

Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

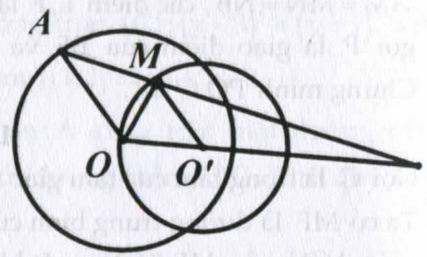
Để tìm tập hợp điểm M ta có thể quy về tìm tập hợp điểm N và tìm một phép vị tự $V_{(I;k)}$ nào đó sao cho $V_{(I;k)}(N) = M$ suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của quỹ tích N qua $V_{(I;k)}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I nằm ngoài đường tròn sao cho $OI = 3R$, A là một điểm thay đổi trên đường tròn $(O;R)$. Phân giác trong góc $\widehat{IOA}$ cắt IA tại điểm M. Tìm tập hợp điểm M khi A di động trên $(O;R)$.

Lời giải

Theo tính chất đường phân giác ta có



$$\frac{MI}{MA} = \frac{OI}{OA} = \frac{3R}{R} = 3$$

$$\Rightarrow IM = \frac{3}{4}IA \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$$

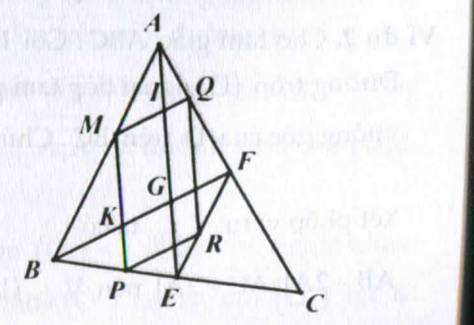
$$\Rightarrow V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}(A) = M$$

Mà A thuộc đường tròn $(O;R)$ nên M thuộc $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$. Vậy tập hợp điểm M là $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Qua điểm M trên cạnh AB vẽ các đường song song với các đường trung tuyến AE và BF, tương ứng cắt BC và CA tại P,Q. Tìm tập hợp điểm R sao cho $MPRQ$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $I = MQ \cap AE$, $K = MP \cap BF$ và G là trọng tâm của tam giác ABC.



Ta có $\frac{MI}{BG} = \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AF} = \frac{IQ}{GF}$

$$\Rightarrow \frac{MI}{IQ} = \frac{BG}{GF} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}.$$

Tương tự ta có $MK = \frac{2}{3}MP$

Từ đó ta có $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MR}$

Do đó $\overrightarrow{GR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}(M) = R$, mà M thuộc cạnh AB nên R thuộc ảnh của cạnh AB qua $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ đoạn chính là đoạn EF.

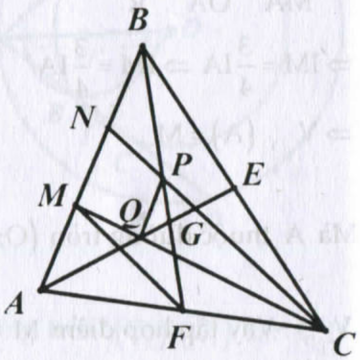
Vậy tập hợp điểm R là đoạn EF.

Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI TOÁN.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$, các điểm E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CB, CA, gọi P là giao điểm của BF và CN, Q là giao điểm của AE với CM. Chứng minh $PQ // AB$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có MF là đường trung bình của tam giác ACN nên $MF // CN$, mặt khác N là trung điểm của MB nên P là trung điểm của BF.

Ta có

$$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GB}.$$

Tương tự $\overrightarrow{GQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

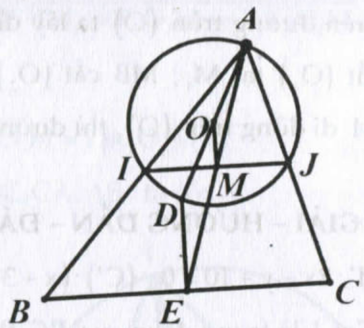
Vậy $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(B) = P$ và $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(A) = Q$ suy ra $PQ // AB$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi I, J, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, IJ. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AO tại D. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên BC. Chứng minh A, M, E thẳng hàng.

Lời giải

Xét phép vị tự $V_{(A;2)}$ ta có

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$ nên $V_{(A;2)}(I) = B, V_{(A;2)}(J) = C$



Do đó $V_{(A;2)}$ biến tam giác AIJ thành tam giác ABC, do đó phép vị tự này biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC.

Do $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} \Rightarrow V_{(A;2)}(O) = D$

$\Rightarrow O' \equiv D$, hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giả sử $V_{(A;2)}(M) = M'$ khi đó $OM \perp IJ \Rightarrow DM' \perp BC \Rightarrow M' \equiv E$.

Vậy $V_{(A;2)}(M) = E$ nên A, M, E thẳng hàng.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

43. Cho đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ và đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Tìm ảnh của d và (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k = -2$.

44. Cho tam giác ABC có B, C cố định còn A chạy trên một đường tròn $(O;R)$ cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

45. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

46. Chứng minh rằng nếu thực hiện liên tiếp hai phép vị tự có tỉ số k_1, k_2 với $k_1 k_2 \neq 1$ thì ta được một phép vị tự có tỉ số $k = k_1.k_2$.

47. Trong một tam giác chứng minh trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng (*đường thẳng đi qua ba điểm này có tên gọi là đường thẳng Ơle*).

48. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh trọng tâm các tam giác ABC, CDA, BCD, DAB cùng nằm trên một đường tròn.

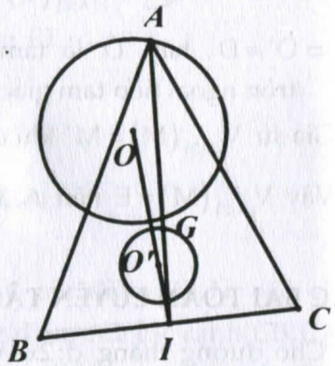
49. Cho ba đường tròn $(O_i; R_i)(i = \overline{1,3})$ đôi một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. Dây cung AC kéo dài của (O_1) cắt (O_3) tại A_1; A_1A_2 là đường kính của (O_3). Chứng minh A, B, A_2 thẳng hàng.

50. Cho hai đường tròn có bán kính khác nhau (O_1) và (O_2) nằm ngoài nhau. Xét đường tròn (O) tiếp xúc ngoài đồng thời (O_1) tại A, với (O_2) tại B.

Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M bất kì $(M \neq A,B)$. Đường thẳng MA cắt (O_1) tại M_1; MB cắt (O_2) tại điểm thứ hai M_2. Chứng minh rằng khi M di động trên (O), thì đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

43. $d': 2x - y + 10 = 0$, $(C'): (x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$.

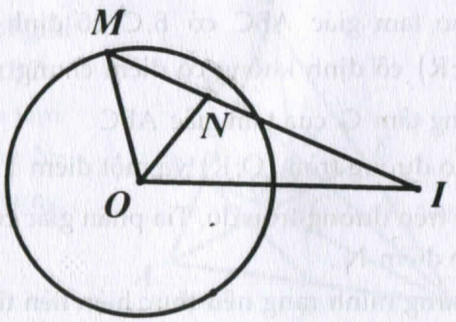


44. Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định

Và $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \Rightarrow V_{(I;\frac{1}{3})}(A) = G$ mà $A \in (O;R)$

nên $G \in \left(O'; \frac{R}{3}\right)$ ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự $V_{(O;\frac{1}{3})}$.

45. Theo tính chất đường phân giác ta có



$$\frac{IN}{NM} = \frac{OI}{OM} = \frac{OI}{R}$$

$$\frac{IN}{IN + NM} = \frac{OI}{OI + R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{OI}{OI + R}$$

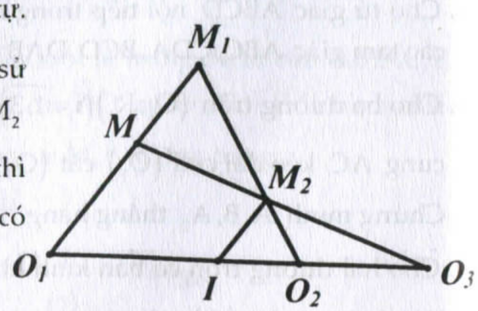
$$\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{OI}{OI + R}\overrightarrow{IM}$$

$\Rightarrow V_{(I;k)}(M) = N$ với $k = \frac{OI}{OI + R}$, mà $M \in (O;R)$ nên $N \in \left(O'; \frac{OI.R}{OI + R}\right)$ ảnh của (O) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{OI}{OI + R}$.

46. Gọi $V_{(O_1,k_1)}; V_{(O_2,k_2)}$ là hai phép vị tự.

Lấy điểm M bất kì. Giả sử $V_{(O_1,k_1)}: M \to M_1$ và $V_{(O_1,k_2)}: M_1 \to M_2$

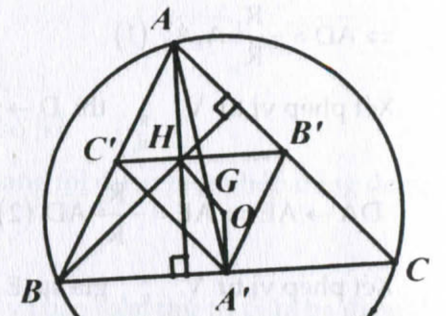
ta sẽ chứng minh với $k_1k_2 \neq 1$ thì $V = V_{(O,k_2)} \circ V_{(O,k_1)}$ là một phép vị tự có tâm $k = k_1k_2$



Gọi $I = V_{(O_2,k_2)}(O_1) \Rightarrow \overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$, khi đó $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$. Gọi O_3 là điểm xác định bởi $\overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$.

Ta có $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}$.

47. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, ta có:



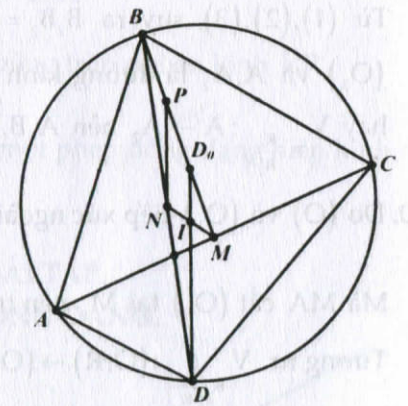
$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

Do đó $V_{(G;-\frac{1}{2})}: \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC và O là trực tâm của tam giác A'B'C' nên $V_{(G;-\frac{1}{2})}(H) = O$

$\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Vậy G, H, O thẳng hàng.

48. Gọi D_0 là trọng tâm tam giác ABC; M, N là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của MN và P là trung điểm của BD_0 khi đó $NP // = \frac{1}{2}DD_0$ (1)



và do D_0 là trọng tâm tam giác ABC nên $MD_0 = D_0P = PB$

Suy ra $ID_0 // = \frac{1}{2}NP$ (2). Từ (1)&(2) suy ra D, D_0, I thẳng hàng và

$ID_0 = \frac{1}{2}NP = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}DD_0 = \frac{1}{4}DD_0 \Rightarrow ID_0 = \frac{1}{3}ID \Rightarrow \overrightarrow{ID_0} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

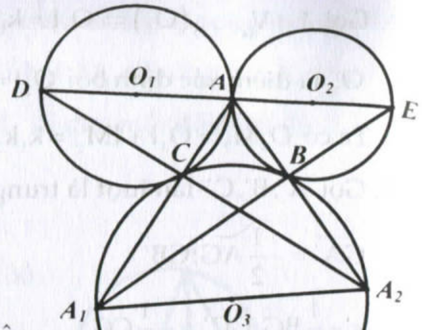
$\Rightarrow V_{(I,-\frac{1}{3})}: D \to D_0$ mà $D \in (\zeta)$

(đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD) nên $D_0 \in (\zeta')$ ảnh của đường tròn (ζ) qua phép vị tự $V_{(I,-\frac{1}{3})}$.

49. Vì hai đường tròn (O_1) và (O_3) tiếp xúc ngoài tại C nên $V_{\left(C;-\frac{R_1}{R_3}\right)}:(O_3;R_3)\to(O_1;R_1)$

nên trong phép vị tự này

$A_1 \to A, A_2 \to D \Rightarrow A_1A_2 \to AM$.



$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\frac{R_1}{R_3}\overrightarrow{A_1A_2}$ (1)

Xét phép vị tự $V_{\left(A,-\frac{R_2}{R_1}\right)}$ thì $D \to E, A \to A$ nên:

$DA \to AE \Rightarrow \overrightarrow{AE} = -\frac{R_2}{R_1}\overrightarrow{AD}$ (2).

Xét phép vị tự $V_{\left(B,-\frac{R_3}{R_2}\right)}$ giả sử $E \to B_1, A \to B_2 \Rightarrow EA \to B_1B_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1B_2} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{EA}$ (3).

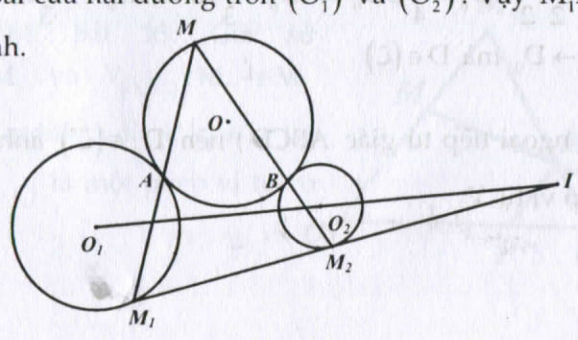
Từ (1),(2),(3) suy ra $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$ mà A_1A_2, B_1B_2 là các dây cung của (O_3) và A_1A_2 là đường kính nên chỉ xảy ra trường hợp $B_1 \equiv A_1, B_2 \equiv A_2$, hay $V_{\left(B,-\frac{R_3}{R_2}\right)}: A \to A_2$ nên A, B, A_2 thẳng hàng.

50. Do (O) và (O_1) tiếp xúc ngoài tại A nên $V_{\left(A,-\frac{R}{R_1}\right)}:(O_1;R_1)\to(O;R)$

Mà MA cắt (O_1) tại M_1 nên trong phép vị tự này $M_1 \to M$

Tương tự $V_{\left(B,-\frac{R_2}{R}\right)}:(O;R)\to(O_2;R_2)$ nên $M \to M_2$

Vậy $F = V_{\left(B;-\frac{R_2}{R}\right)} \circ V_{\left(A;-\frac{R}{R_1}\right)} = V_{\left(I,\frac{R_2}{R_1}\right)}(M_1) = M_2$, mà $F((O_1)) = (O_2)$ nên I chính là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Vậy M_1M_2 luôn đi qua điểm I cố định.



Phép đồng dạng

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa. Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' của chúng ta luôn có $M'N' = k.MN$.

Nhận xét.

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Nếu thực hiện liên tiếp các phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng.

2. Tính chất của phép đồng dạng.

Phép đồng dạng tỉ số k

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.
- Biến một đường thẳng hành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính k.R

3. Hai hình đồng dạng.

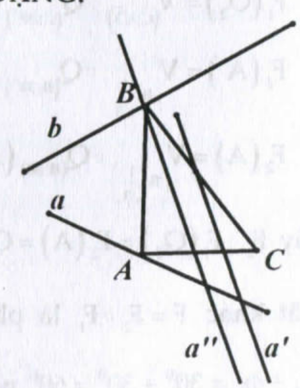
Hai hình được gọi là đồng dạng nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐỒNG DẠNG.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và điểm C. Tìm trên a và b các điểm A, B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.



Lời giải

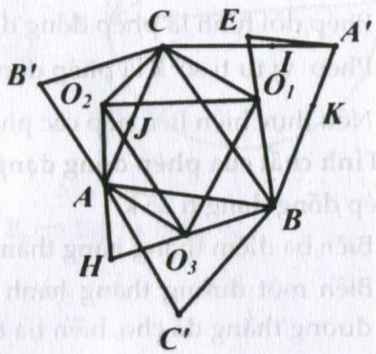
Ta thấy góc lượng giác $(CA;CB) = -45^0$ và $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$.

Do đó có thể xem B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C góc quay -45^0 và phép vị tự $V_{(C;\sqrt{2})}$. Vì $a \in a \Rightarrow B \in a'' = F(a)$ lại có $B \in b$ nên $B = a'' \cap b$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi $O_1; O_2; O_3$ lần lượt là tâm của ba tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Chứng minh tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều.

Lời giải

Cách 1:



Để chứng minh tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều ta xét các phép đồng dạng sau:

Kí hiệu $F(I, \phi; k) = V_{(I;k)} \circ Q_{(I;\phi)}$ là phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I;\phi)}$ và phép vị tự $V_{(I;k)}$.

Ta xét các phép đồng dạng $F_1 = F(C; 30^0; \sqrt{3})$ và $F_2\left(B; 30^0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ Gọi I, J, K, H là các điểm trên $CA', CA, BA', BO_3; BO_1$ sao cho $CI = CO_1; CJ = CO_2$, $BK = BO_1; BH = AB, BE = BA'$ khi đó:

$F_1(O_1) = V_{(C;\sqrt{3})} \circ Q_{(C;30)}(O_1) = V_{(C;\sqrt{3})}(I) = A'$,

Tương tự :

$$F_1(O_2) = V_{(C;\sqrt{3})} \circ Q_{(C;30^0)}(O_2) = V_{(C;\sqrt{3})}(J) = A$$

$$F_2(A') = V_{\left(B;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \circ Q_{(B;30^0)}(A') = V_{\left(B;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(E) = O_1$$

$$F_2(A) = V_{\left(B;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \circ Q_{(B;30)}(A) = V_{\left(B;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(H) = O_3$$

Vậy $F_2 \circ F_1(O_2) = F_2(A) = O_3$ và $F_2 \circ F_1(O_1) = F_2(A') = O_1$.

Mặt khác $F = F_2 \circ F_1$ là phép đồng dạng có tỉ số $k = k_1k_2 = \sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$ và $\phi_1 + \phi_2 = 30^0 + 30^0 = 60^0$ nên F chính là phép quay tâm O_1 góc quay 60^0.

Do đó $Q_{(O_1;60^0)}(O_2) = O_3$ nên tam giác $O_1O_2O_3$ đều.

Cách 2: Bài toán này có thể giải bằng phép quay vec tơ đơn giản hơn như sau:

Do O_1, O_3 là trọng tâm các tam giác $A'BC$ và $C'AB$ nên:

$$\overrightarrow{O_3A} + \overrightarrow{O_3B} + \overrightarrow{O_3C'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1A'} + \overrightarrow{A'B}\right) + \left(\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BC'}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_3O_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B}\right).$$

Xét phép quay vec tơ góc quay 60^0 ta có

$$Q_{60^0}\left(\overrightarrow{O_3O_1}\right) = \frac{1}{3}\left(Q_{60^0}\left(\overrightarrow{AC}\right) + Q_{60^0}\left(\overrightarrow{BA'}\right) + Q_{60^0}\left(\overrightarrow{C'B}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'A}\right)$$

$= \overrightarrow{O_3O_2}$. Vậy tam giác $O_1O_2O_3$ đều.

CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Các tính chất thừa nhận.

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

  Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .
- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

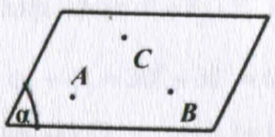
2. Cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

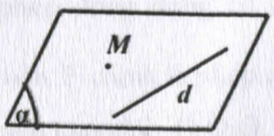
- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

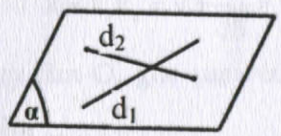
- (ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A,B,C (h1)
- (M,d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)
- (d_1,d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1,d_2 (h3)



(h1)



(h2)



(h3)

3. Hình chóp và hình tứ diện.

3.1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1,A_2,...,A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$ được gọi là hình chóp , kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy , các đoạn $SA_1,SA_2,...,SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2,A_2A_3,...,A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$ là các mặt bên...

3.2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

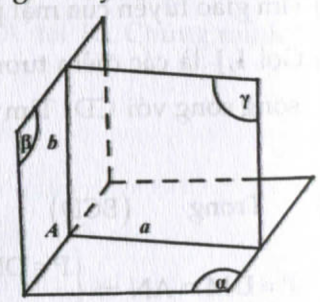
Bài toán 01: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.

Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau :

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $A = a \cap b$ chính là điểm chung của (α) và (β).



CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

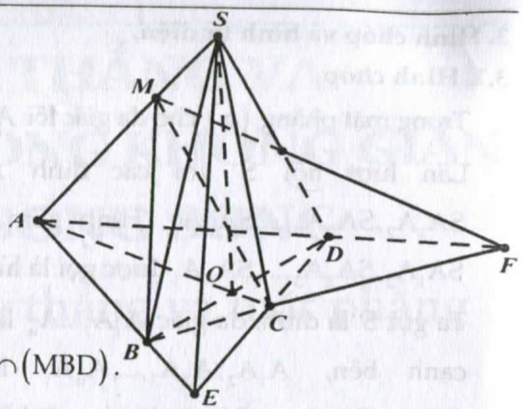
a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải

a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$



$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

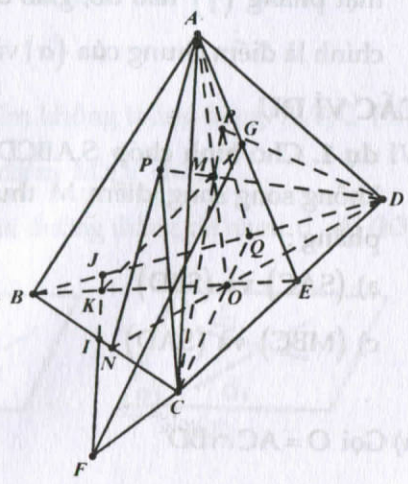
a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng $(ABC), (ABD)$.

b) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Lời giải

a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi

$P = DM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases}$



$\Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC)$

$\Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$

D là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

b) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$; trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Có $\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$, $\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD)$. Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG – BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Phương pháp:

- Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường thẳng còn lại.

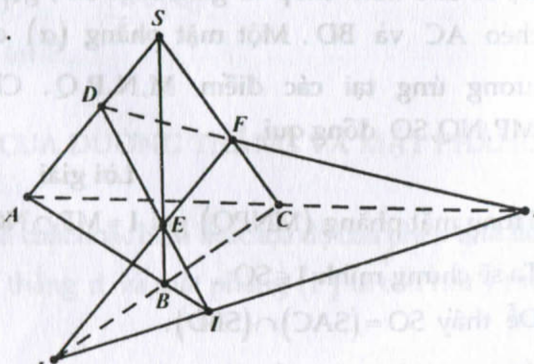
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).



Tương tự $J = EF \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2)

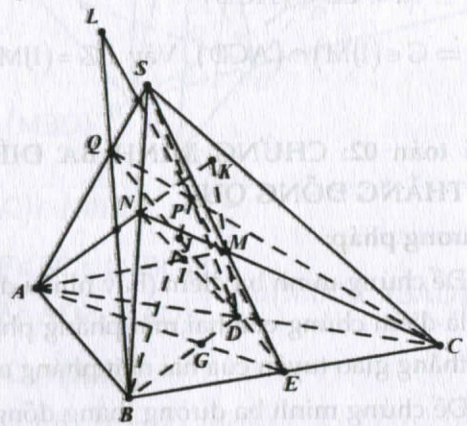
$K = DF \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện SABC có D, E lần lượt là trụng điểm của AC, BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD, SA tương ứng tại P và Q. Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Chứng minh S, I, J, G thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases}$$

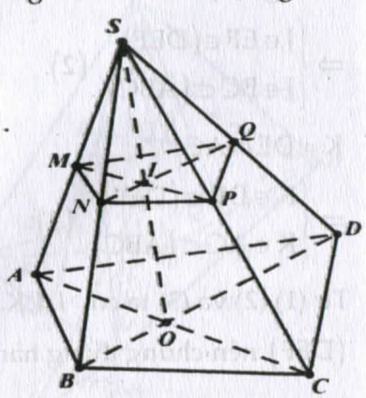
$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SBD) \\ I \in (SAE) \end{cases} \quad (3)$$

$$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải



Trong mặt phẳng (MNPQ) gọi $I = MP \cap NQ$.

Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

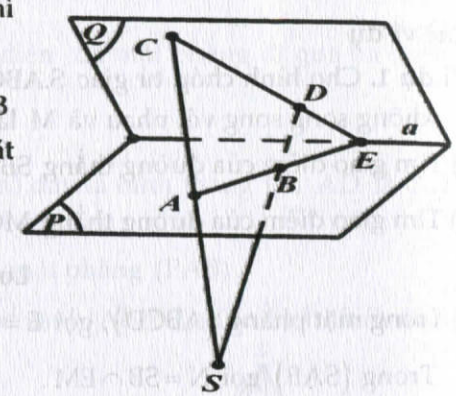
Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.

Ví dụ 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng a. Trong (P) lấy hai điểm A, B nhưng không thuộc a và S là một điểm không thuộc (P). Các đường thẳng SA, SB cắt (Q) tương ứng tại các điểm C, D. Gọi E là giao điểm của AB và a. Chứng minh AB, CD và a đồng qui.

Lời giải



Trước tiên ta có $S \notin AB$ vì ngược lại thì

$S \in AB \subset (P) \Rightarrow S \in (P)$

(mâu thuẫn giả thiết) do đó S, A, B không thẳng hàng, vì vậy ta có mặt phẳng (SAB).

$$\text{Do } C = SA \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} C \in SA \subset (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \in (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } D = SB \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} D \in SB \subset (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D \in (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CD = (SAB) \cap (Q)$.

$$\text{Mà } E = AB \cap a \Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in (SAB) \\ E \in (Q) \end{cases} \Rightarrow E \in CD.$$

Vậy AB, CD và a đồng qui tại E.

Bài toán 03: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M, khi đó

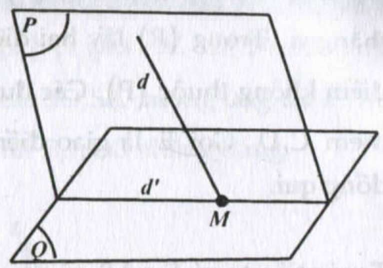
$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$

Trường hợp 2. Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d

Bước 2: Tìm giao tuyến $\Delta = (P)\cap(Q)$

Bước 3: Trong (Q) gọi $M = d\cap\Delta$ thì M chính là giao điểm của $d\cap(P)$.



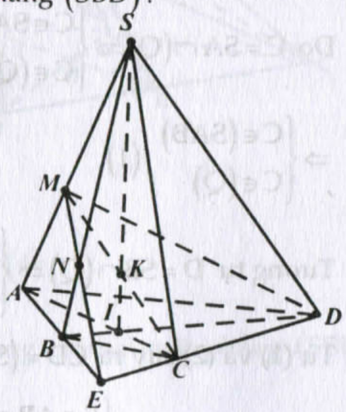
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB\cap CD$.

Trong (SAB) gọi $N = SB\cap EM$.

Ta có $N\in EM\subset(MCD)\Rightarrow N\in(MCD)$

và $N\in SB$ nên $N = SB\cap(MCD)$.

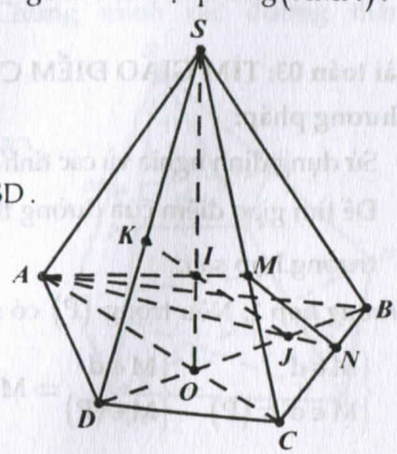
b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC\cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC\cap SI$.

Ta có $K\in SI\subset(SBD)$ và $K\in MC$ nên $K = MC\cap(SBD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$

gọi $O = AC\cap BD, J = AN\cap BD$.

Trong (SAC) gọi $I = SO\cap AM$ và $K = IJ\cap SD$.

Ta có $I\in AM\subset(AMN), J\in AN\subset(AMN)$

$\Rightarrow IJ\subset(AMN)$.

Do đó $K\in IJ\subset(AMN)\Rightarrow K\in(AMN)$.

Vậy $K = SD\cap(AMN)$

Bài toán 04: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG VỚI HÌNH CHÓP.

Phương pháp:

Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp)

Trong phần này chúng ta chỉ xét thiết diện của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

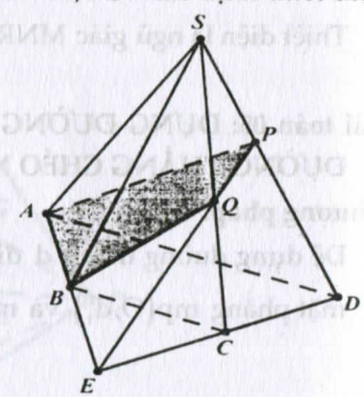
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB).

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB\cap CD$.

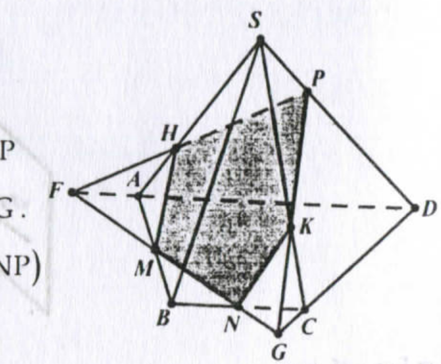
Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC\cap EP$.

Ta có $E\in AB$ nên $EP\subset(ABP)$

$\Rightarrow Q\in(ABP)$, do đó $Q = SC\cap(ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.

b)Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD



Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA\cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC\cap PG$.

Ta có $F\in MN\Rightarrow F\in(MNP), \Rightarrow FP\subset(MNP)$

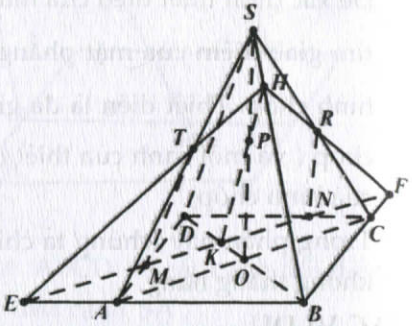
$\Rightarrow H\in(MNP)$

Vậy $\begin{cases} H\in SA \\ H\in(MNP)\end{cases}\Rightarrow H = SA\cap(MNP)$. Tương tự $K = SC\cap(MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P là ba điểm trên các cạnh AD,CD,SO. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABCD) gọi E,K,F lần lượt là giao điểm của MN với DA,DB,DC.

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H = KP \cap SB$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T = EH \cap SA$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R = FH \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP)$, $\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP)$.

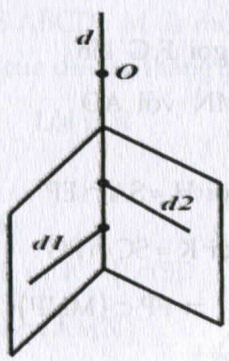
Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác MNRHT.

Bài toán 05: DỰNG ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

Để dựng đường thẳng d đi qua O và cắt d_1, d_2 ta dựng giao tuyến của hai mặt phẳng $mp(O,d_1)$ và $mp(O,d_2)$, khi đó $d = mp(O,d_1) \cap mp(O,d_2)$.



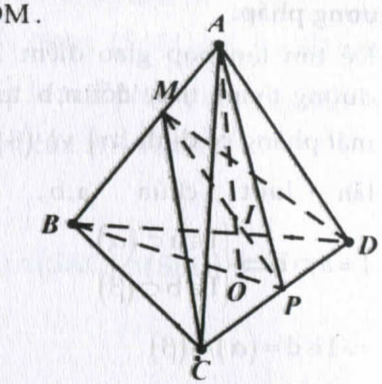
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD, O là điểm huộc miền trong tam giác BCD, M là một điểm trên cạnh AB.

a) Dựng đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.

b) Gọi N là mộtđiểm trên cạnh BC sao cho ON không song song với BD. Dựng đường thẳng đi qua N cắt AO và DM.

Lời giải



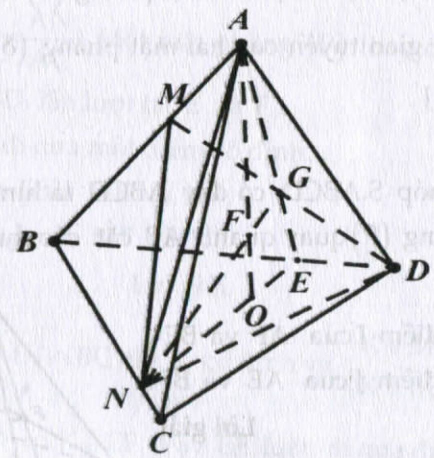
a) Trong (BCD) gọi $P = BO \cap CD$

Trong (ABN) gọi $I = PM \cap AO$

Đường thẳng MP chính là đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.

b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $E = NO \cap BD$

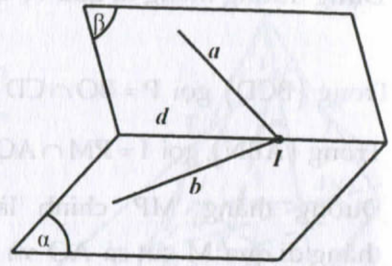
Trong (ABD) gọi $G = MD \cap AE$, trong (NAE) gọi $F = AO \cap NG$, thì NG chính là đường thẳng đi qua N cắt cả AO và DM.



Bài toán 06: TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG VÀ BÀI TOÁN CHỨNG MINH GIAO TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Phương pháp:

Để tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng thay đổi a,b ta chọn hai mặt phẳng cố định (α) và (β) cắt nhau lần lượt chứa a,b, khi đó



$$I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \subset (\alpha) \\ I \in b \subset (\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in d = (\alpha) \cap (\beta)$$

Vậy điểm I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

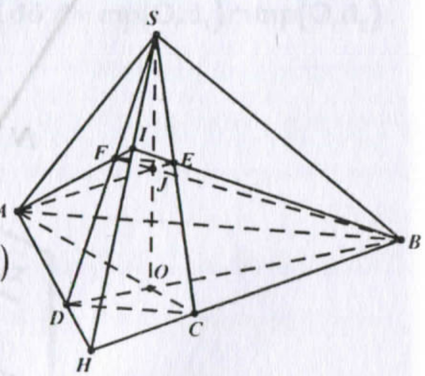
- Chọn một điểm cố định J thuộc hai mặt phẳng (δ) và (γ)
- Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng (δ) và (γ), khi đó d đi qua điểm cố định J.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Một mặt phẳng (P) quay quanh AB cắt các cạnh SC,SD tại các điểm tương ứng E,F.

a) Tìm tập hợp giao điểm I của AF và BE.

b) Tìm tập hợp giao điểm J của AE và BF.



Lời giải

a) *Phần thuận:*

Ta có $I = AF \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in AF \\ I \in BE \end{cases}, \begin{cases} AF \subset (SAD) \\ BE \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi $H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \\ H \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H \in (SAD) \\ H \in (SBC) \end{cases}$.

$\Rightarrow SH = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in SH$.

Giới hạn: Khi E chạy đến C thì F chạy đến D và I chạy đến H.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và I chạy đến S.

Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn SH, trong (SAH) gọi $F = SD \cap AI$, trong (SBH) gọi $E = SH \cap BI$ khi đó (ABEF) là mặt phẳng quay quanh AB cắt các cạnh SC,SD tại E,F và I là giao điểm của AF và BE.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn SH.

b) Ta có $J = AE \cap BF \Rightarrow \begin{cases} J \in AE \\ J \in BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$

Nhưng $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $J \in SO$.

Khi E chạy đến chạy đến C thì F chạy đến D và J chạy đến O.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và J chạy đến S.

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm J là đoạn SO.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABDC. Hai điểm M,N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

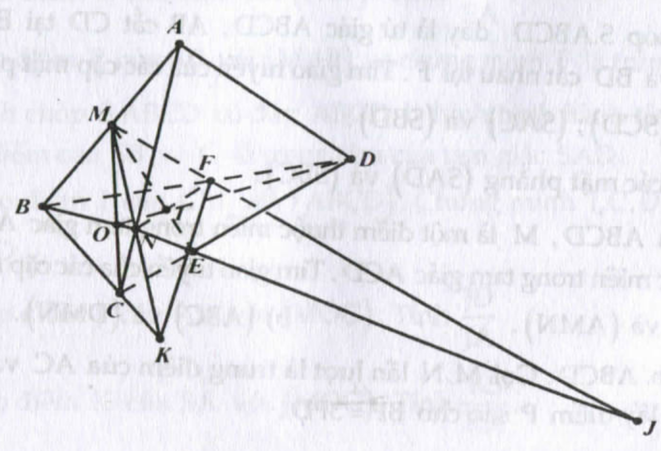
b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

Lời giải

a) Trong (ABC) gọi $K = MN \cap BC$ thì K cố định và $\begin{cases} K \in MN \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (BCD) \end{cases}$

Lại có $EF = (P) \cap (BCD) \Rightarrow K \in EF$. Vậy EF luôn đi qua điểm K cố định



b) *Phần thuận:* Trong (P) gọi $I = ME \cap NF \Rightarrow \begin{cases} I \in ME \subset (MCD) \\ I \in NF \subset (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$.

Gọi $O = CM \cap BN \Rightarrow OD = (MCD) \cap (NBD) \Rightarrow I \in OD$

Giới hạn: Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Phần đảo: Gọi I là điểm bất kì trên đoạn OD, trong (MCD) gọi $E = MI \cap CD$, trong (NBD) gọi $F = NI \cap BD$ suy ra $(MNEF)$ là mặt phẳng quay quanh MN cắt các cạnh DB, DC tại các điểm E, F và $I = ME \cap NF$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn OD.

c) Gọi $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (ADB) \\ J \in NE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ADB) \cap (ACD)$.

Mà $AD = (ADC) \cap (ADB)$.

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và J chạy đến A

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Từ đó ta có tập hợp điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD)

b) Gọi E, F là các điểm lần lượt trên các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DEF).

2. Cho hình chóp S.ABCD đáy là tứ giác ABCD, AB cắt CD tại E, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

3. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABD, N một điểm thuộc miền trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (BCD) và (AMN). b) (ABC) và (DMN).

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 3PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP).

5. Cho hình chóp S.ABCD, M và N là các điểm lần lượt trên các cạnh SC, BC.

a) Tìm giao điểm của AM với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD với (SMN).

6. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, A,B là hai điểm nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α) với (α). Một mặt phẳng (β) quay quanh AB cắt d và d' lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi $I = AM \cap BN$, chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi $J = AN \cap BM$, chứng minh J thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh IJ đi qua một điểm cố định.

7. Cho tứ diện ABCD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh $DE = DC$.

b) Xác định giao điểm F của đường thẳng AD với (IJK) và chứng minh $FA = 2FD$.

c) Chứng minh $FK \parallel AB$.

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của AM với (SBD). Tính $\frac{EM}{EA}$.

b) Tìm giao điểm F của SD với (MAB) và chứng minh F là trung điểm của SD.

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I,C,D thẳng hàng và $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của AD với (MOG). Tính $\frac{JD}{JA}$.

c) Tìm giao điểm K của SA với (MOG). Tính $\frac{KS}{KA}$.

10. Cho mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng a,b cắt nhau ở O và c là đường thẳng cắt (α) tại $I\ (I \neq O)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $mp(O,c)$

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b) và chứng minh Δ luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AMN)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I,J lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh SA và SC (IJ không song song với AC). Một mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt SB tại M và cắt SD tại N.

a) Chứng minh các đường thẳng MN, IJ, SO đồng qui

b) Giả sử $AD \cap BC = E, IN \cap JM = F$. Chứng minh S,E,F thẳng hàng.

c) Gọi $P = IN \cap AD, Q = JM \cap BC$. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

13. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh AB,BC,CS lấy các điểm M,N,P sao cho MN và AC không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

b) Giả sử $I = MP \cap NQ$, chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P chạy trên cạnh SC.

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là một điểm trên cạnh SD sao cho $SM = \frac{1}{3}SD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến d của (SBC) và (AMN). Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với (MNG).

15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC tương ứng tại các điểm A',B',C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm $D'P$ của (α) với SD.

b) Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I,J là hai điểm trên các cạnh AD và SB.

a) Tìm giao các điểm K,L của các đường thẳng IJ và DJ với (SAC).

b) Giả sử $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh A,K,L,M thẳng hàng.

17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với $JS > JC$. Gọi (α) là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt các cạnh SD,SB tại M,N. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

18. Cho tứ diện $ADCD$ thỏa mãn điều kiện $AB.CD = AC.BD = AD.CB$. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng qui tại một điểm.

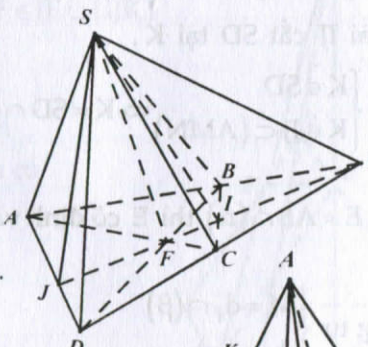
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Ta có M,N lần lượt là điểm chung của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD) nên $(MBC) \cap (NAD) = MN$.

b) Gọi $I = BM \cap DE \Rightarrow \begin{cases} I \in BM \subset (BCM) \\ I \in DE \subset (DEF) \end{cases} \Rightarrow I \in (BCM) \cap (DEF)$.

Tương tự, gọi $J = CM \cap DF$ thì $\Rightarrow J \in (BCM) \cap (DEF)$.

Do đó $IJ = (BCM) \cap (DEF)$.



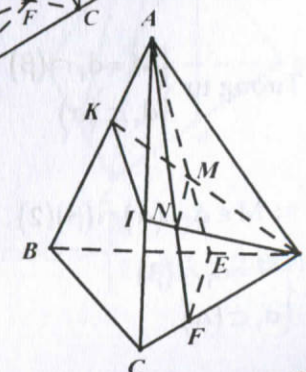
2. a) Ta có $(SAB) \cap (SCD) = SE$,

$(SAC) \cap (SBD) = SF$.

b) Gọi I,J lần lượt là giao điểm của EF với BC,AD thì

$(SEF) \cap (SAD) = SJ$, $(SEF) \cap (SBC) = SI$.

3.



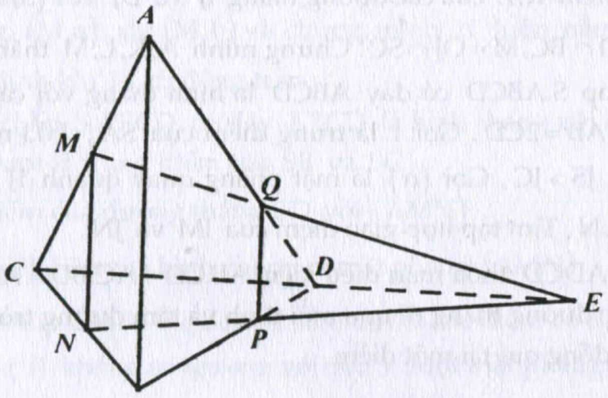
a) Gọi E,F lần lượt là giao điểm của AM,AN với BD và CD thì $EF = (AMN) \cap (BCD)$.

b) Gọi I,K lần lượt là giao điểm của DN,DM với AC và AB thì $EF = (DMN) \cap (ABC)$.

4. a) Trong (BCD) gọi $E = CD \cap NP$ thì $\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP \subset (MNP) \end{cases}$

$\Rightarrow E = CD \cap (MNP)$.

b) Trong (ACD) gọi $Q = AD \cap ME$ thì ta có $(MNP) \cap (ABD) = PQ$



5.

a) Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$,

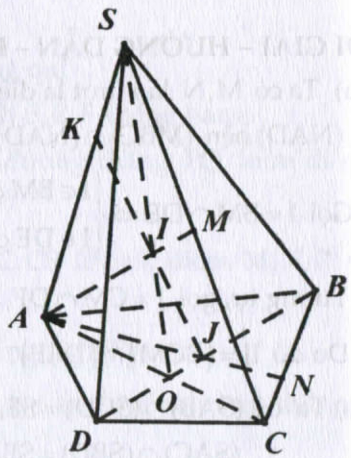
trong (SAC) gọi $I = AM \cap SO$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap (SBC)$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $J = AN \cap BD$,

kéo dài IJ cắt SD tại K.

Ta có $\begin{cases} K \in SD \\ K \in IJ \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap (AMN)$.

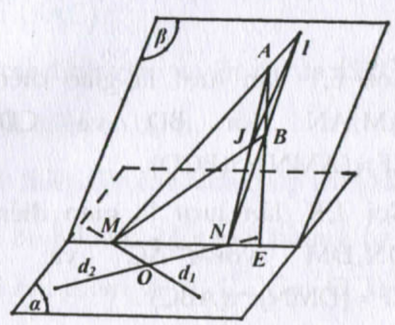


6. a) Gọi $E = AB \cap (\alpha)$ thì E cố định và $\begin{cases} E \in AB \subset (\beta) \\ E \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ (1)

Tương tự $\begin{cases} M = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta) (2)$.

$\begin{cases} N = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases}$



$\Rightarrow N \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra M,N,E thẳng hàng hay MN đi qua điểm E cố định.

b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset mp(A,d_1) \\ I \in BN \subset mp(B,d_2) \end{cases} \Rightarrow I \in \Delta' = mp(A,d_1) \cap mp(B,d_2)$

rõ ràng $mp(A,d_1), mp(B,d_2)$ là các mặt phẳng cố định nên Δ' cố định.

Vậy I luôn thuộc đường thẳng cố định Δ'.

c) Lập luận tương tự câu b) ta có $J \in \Delta'' = mp(A,d_2) \cap mp(B,d_1)$.

d) Gọi (δ) là mặt phẳng xác định bởi Δ', Δ'' thì (δ) cố định

Gọi $F = AB \cap (\delta)$. Gọi $K = AB \cap (\delta) \Rightarrow K$ cố định

Dễ thấy I,J là điểm chung của các mặt phẳng $(A,d_1),(B,d_2)$ và (A,d_2), (B,d_1) nên I,J thuộc $mp(\Delta', \Delta'')$. Vậy I,J,K thẳng hàng do đó IJ đi qua điểm K cố định.

7. a) Trong (BCD) gọi $E = JK \cap CD \Rightarrow \begin{cases} E \in CD \\ E \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (IJK)$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác BCD đối với cát tuyến EKJ ta có

$\frac{KD}{KB} \cdot \frac{JB}{JC} \cdot \frac{EC}{ED} = 1$ mà $\frac{KD}{KB} = \frac{1}{2}, \frac{JB}{JC} = 1$, do đó $\frac{EC}{ED} = 2$. Hay $DE = DC$.

b) Trong (ACD) gọi $F = AD \cap IE \Rightarrow \begin{cases} F \in AD \\ F \in IE \subset (IJK) \end{cases}$

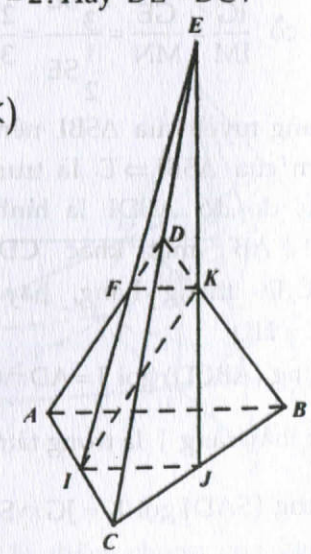
$F = AD \cap (IJK)$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác ACD đối với cát tuyến EFI ta có

$\frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{IA}{IC} = 1$, mà $\frac{EC}{ED} = 2$ (câu a)

$\frac{IA}{IC} = 1$ suy ra $\frac{FD}{FA} = \frac{1}{2} \Rightarrow FA = 2FD$.

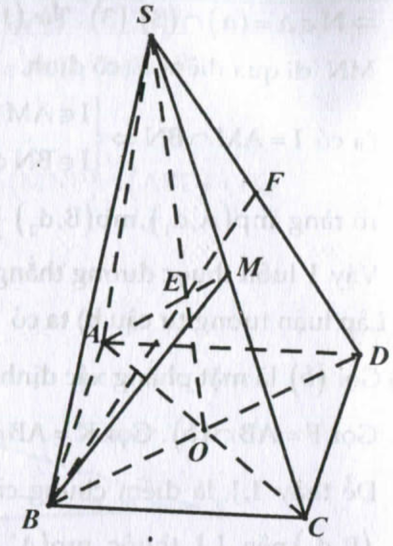
c) Do $\frac{FD}{FA} = \frac{1}{2}, \frac{KD}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{KD}{KB} \Rightarrow FK \mathbin{//} AB$.



8. a) Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) gọi $E = AM \cap SO \Rightarrow \begin{cases} E \in AM \\ E \in SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow E = AM \cap (SBD)$.

Do O,M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên E là trọng tâm của tam giác SAC do đó $\frac{EM}{EA}=\frac{1}{2}$.



b) Trong (SBD) gọi $F=BE\cap SD$

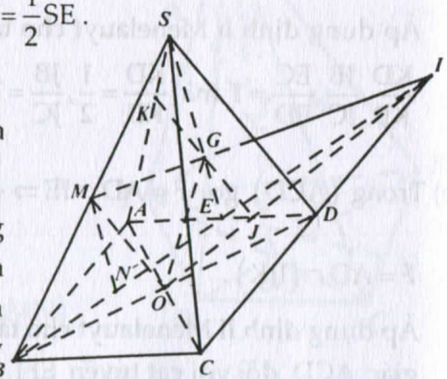
$$\Rightarrow\begin{cases}F\in SD\\ F\in BE\subset(ABM)\end{cases}\Rightarrow F=SD\cap(ABM).$$

Vì SO là trung tuyến của tam giác SBD và $\frac{SE}{SO}=\frac{2}{3}$ (do E là trọng tâm của tam giác SAC) nên E là trọng tâm của tam giác SBD, do đó F là trung điểm của SD.

9. a) Gọi E là trung điểm của AD và $I=MG\cap BE$

$$\Rightarrow\begin{cases}I\in MG\\ I\in BE\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow I=GM\cap(ABCD).$$

Gọi N là trung điểm của BE thì $MN\,//=\frac{1}{2}SE$.



Ta có $\frac{IG}{IM}=\frac{GE}{MN}=\frac{\frac{1}{3}SE}{\frac{1}{2}SE}=\frac{2}{3}$, mà IM là trung tuyến của ΔSBI nên G là trọng tâm của $\Delta SBI\Rightarrow E$ là trung điểm của BI, do đó ABDI là hình bình hành DI // AB, mặt khác CD // AB. Vậy I,C,D thẳng hàng, hay $I\in CD$ và $IC=2ID$.

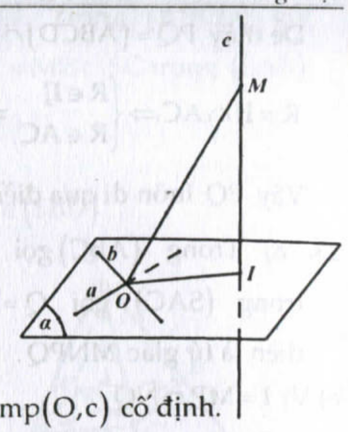
b) Trong (ABCD) gọi $J=AD\cap OI$ thì J chính là giao điểm của AD với (OMG).

Dễ thấy rằng J là trọng tâm của tam giác IAC nên $\frac{JA}{JD}=2$.

c) Trong (SAD) gọi $K=JG\cap SA$ thì K là giao điểm của (OMG) với SA

Ta có J là trọng tâm tam giác IBD nên $\frac{EJ}{ED}=\frac{1}{3}=\frac{EG}{ES}\Rightarrow JG\,//\,SD$ từ đó ta có $\frac{KS}{KA}=\frac{JD}{JA}=\frac{1}{2}$.

10.



a) Ta có $I=c\cap(\alpha)\Rightarrow\begin{cases}I\in c\subset mp(O,c)\\ I\in(\alpha)\end{cases}$

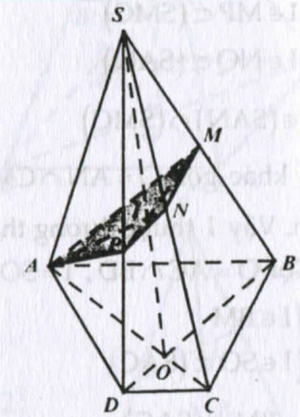
Lại có $O\in(\alpha)\cap mp(O,c)\Rightarrow OI=(\alpha)\cap mp(O,c)$.

b) Do $O=a\cap b\Rightarrow\begin{cases}O\in a\subset mp(M,a)\\ O\in b\subset mp(M,b)\end{cases}$

$\Rightarrow O\in mp(M,a)\cap mp(M,b)$.

Vậy $OM=mp(M,a)\cap mp(M,b)$, rõ ràng $OM\subset mp(O,c)$ cố định.

11.



a) Gọi $O=AC\cap BD$, trong (SAC) gọi $I=SO\cap AN$,

trong (SBD) gọi $P=MI\cap SD$ thì $P=SD\cap(AMN)$.

b) Thiết diện là tứ giác AMNP.

12. a) Trong (α) gọi $K=IJ\cap MN$

Ta chứng minh S,O,K thẳng hàng.

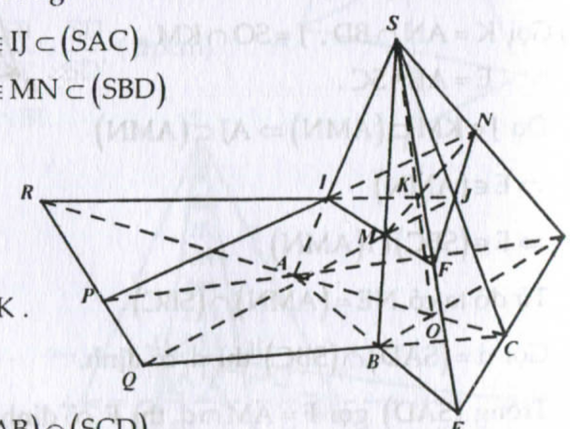
Thật vậy $K=IJ\cap MN\Rightarrow\begin{cases}K\in IJ\subset(SAC)\\ K\in MN\subset(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow K\in(SAC)\cap(SBD)$.

Mà $SO=(SAC)\cap(SBD)$

$\Rightarrow K\in SO$

Vậy SO,IJ,MN đồng qui tại K.



b) Ta có $E=AB\cap CD$

$$\Rightarrow\begin{cases}E\in AB\subset(SAB)\\ E\in CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow E\in(SAB)\cap(SCD)$$

Tương tự $F\in(SAB)\cap(SCD)$, do đó S,E,F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên chúng thẳng hàng.

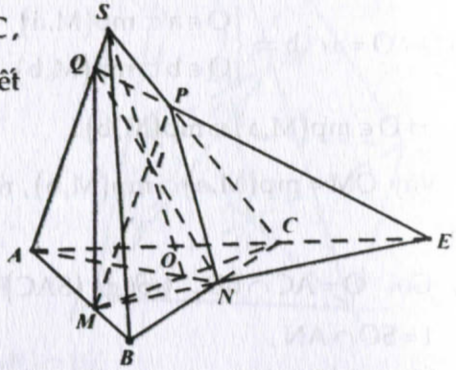
c) Do IJ không song song với AC nên trong (SAC) gọi $R=IJ\cap AC$ thì R cố định.

Dễ thấy $PQ = (ABCD) \cap (\alpha)$.

$R = IJ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} R \in IJ \\ R \in AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \in (\alpha) \\ R \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow R \in PQ$.

Vậy PQ luôn đi qua điểm R cố định khi (α) thay đổi.

13. a) Trong (ABC) gọi $E = MN \cap AC$, trong (SAC) gọi $Q = EP \cap SA$, thiết diện là tứ giác MNPQ.



b) Vì $I = MP \cap NQ$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in MP \subset (SMC) \\ I \in NQ \subset (SAN) \end{cases}$

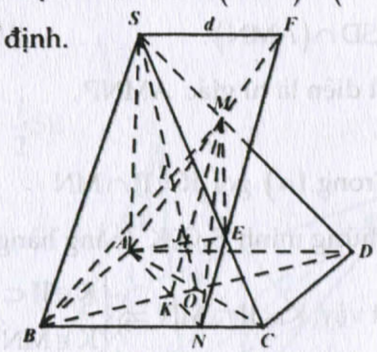
$\Rightarrow I \in (SAN) \cap (SMC)$

Mặt khác gọi $O = AN \cap CM$ thì O cố định nên $SO = (SCM) \cap (SAN)$ cố định. Vậy I thuộc đường thẳng SO cố định.

14. a) Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap BM$

thì $\begin{cases} I \in BM \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow I = BM \cap (SAC)$.



b) Gọi $K = AN \cap BD$, $J = SO \cap KM$, $E = AJ \cap SC$.

Do $J \in KM \subset (AMN) \Rightarrow AJ \subset (AMN)$

$\Rightarrow E \in (AMN)$

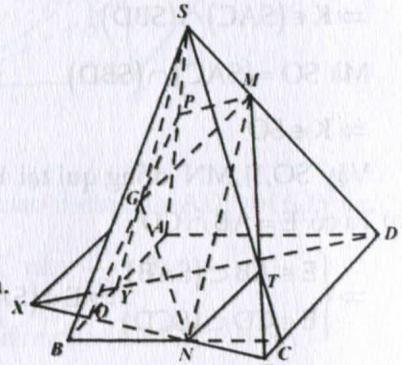
$\Rightarrow E \in (SBC) \cap (AMN)$.

Từ đó ta có $NE = (AMN) \cap (SBC)$.

Gọi $d = (SAD) \cap (SBC)$ thì d cố định.

Trong (SAD) gọi $F = AM \cap d$ thì F cố định.

Do $F \in d \subset (SBC) \Rightarrow F \in (SBC)$.



Vậy N, E, F là điểm chung của hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) nên chúng thẳng hàng, hay NE đi qua điểm F cố định.

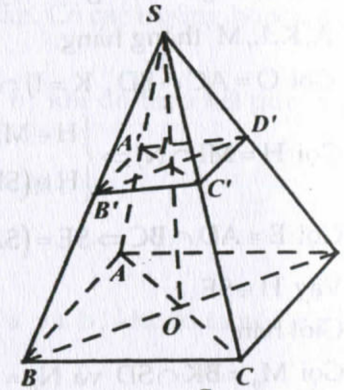
c) Gọi Y là trung điểm của AB và $X = DY \cap MG$. Trong $(ABCD)$ gọi $O = NX \cap AB$ và $Z = NX \cap CD$, trong (SCD) gọi $T = MZ \cap SC$ trong (SAB) gọi $P = QG \cap SA$. Thiết diện là ngũ giác MPQNT.

15.

a) Trong (SAC) gọi $I = SO \cap A'C'$, vì $I \in SO \subset BD \Rightarrow I \in (SBD)$.

Trong (SBD) gọi $D' = B'I \cap SD$

$\Rightarrow \begin{cases} D' \in SD \\ D' \in B'I \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow D' = SD \cap (\alpha)$.



b) Kẻ $AK // A'C', K \in SO$ và $CJ' // A'C', J \in SO$.

Ta có $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SK}{SI}$.

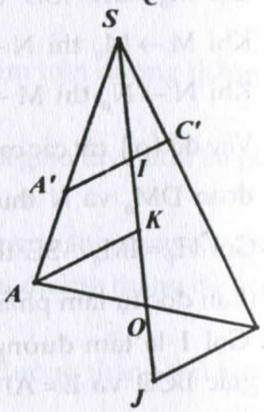
Và $\dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SJ}{SI} \Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SO}{SI} + \dfrac{SK}{SI}$

$= \dfrac{SO + SJ}{SI} = \dfrac{(SO - OK) + (SO + OJ)}{SI} = \dfrac{2SO}{SI}$ (1)

(do $AK // CJ \Rightarrow \dfrac{OK}{OJ} = \dfrac{OA}{OC} = 1 \Rightarrow OK = OJ$)

Tương tự ta cũng tính được $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$ (đpcm)



16. a) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BI$

$\Rightarrow E \in BI \subset (SBI)$.

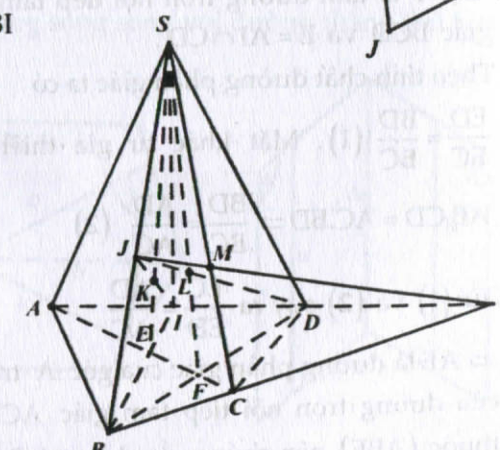
Trong (SBI) gọi $K = IJ \cap SE$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi $F = AC \cap BD$

$\Rightarrow F \in BD \subset (SBD)$.



Trong (SBD) gọi $L = SF \cap DJ \Rightarrow \begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

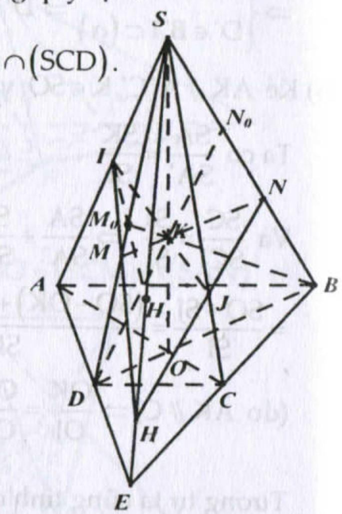
b) Dễ thấy $A,K,L,M \in (SAC)$ (1).

Mặt khác $K \in IJ \subset (AOJ), L \in DJ \subset (AOJ)$, $M \in OJ \subset (AOJ)$

nên $A,K,L,M \in (AOJ)$ (2).

Từ (1),(2) suy ra A,K,L,M cùng thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (AOJ) nên chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (AOJ), hay A,K,L,M thẳng hàng.

17. Gọi $O = AC \cap BD$, $K = IJ \cap SO$ thì SO,MN,IJ đồng quy tại K



Gọi $H = MI \cap NJ \Rightarrow \begin{cases} H \in MI \subset (SAB) \\ H \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$.

Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC)$.

Vậy $H \in SE$.

Giới hạn

Gọi $M_0 = BK \cap SD$ và $N_0 = DK \cap SB$

Khi $M \to M_0$ thì $N \to B$

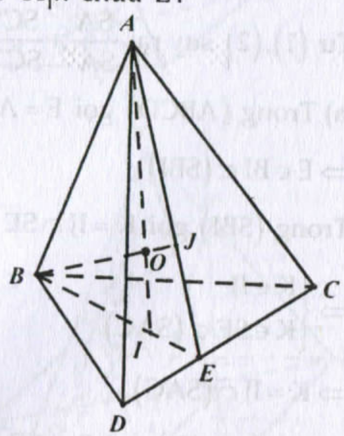
Khi $N \to N_0$ thì $M \to D$

Vậy để (α) cắt các cạnh SB,SD thì M thuộc đoạn DM_0 và N thuộc đoạn BN_0.

Gọi $H_1 = IM_0 \cap SE$ thì quỹ tích điểm H là tia H_1x chứa E.

(Bạn đọc tự làm phần đảo).

18. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và $E = AI \cap CD$.



Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC}$ (1). Mặt khác từ giả thiết

$AB.CD = AC.BD \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow$ AE là đường phân giác của góc A trong tam giác ACD. Nghĩa là tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ACD thuộc AE. Do AI và BJ cùng thuộc (ABE) nên chúng cắt nhau tại O. Vậy bốn đường thẳng nối các đỉnh với tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đôi một cắt nhau và chúng không đồng phẳng nên phải đồng quy.

Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có các trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b:

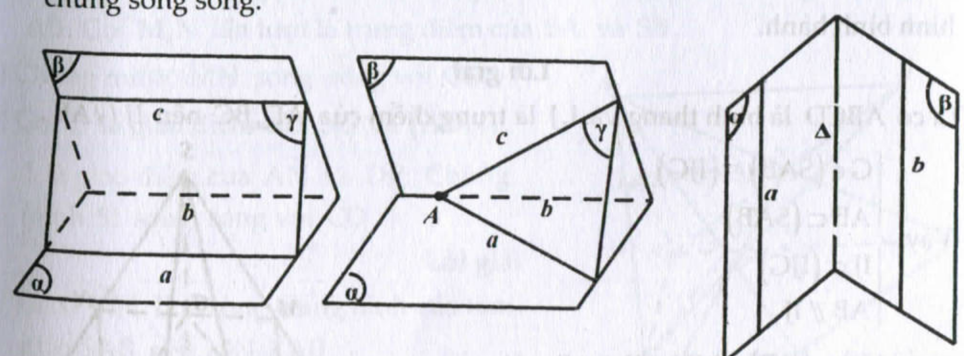
Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa cả a và b, khi đó theo kết quả trong hình học phẳng ta có ba khả năng sau:

- a và b cắt nhau tại điểm M, ta kí hiệu $a \cap b = M$.
- a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a \parallel b$.
- a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, khi đó ta nói a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

2. Các định lí và tính chất.

- Trong không gian, qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng a có một và chỉ một đường thẳng song song với a.
- Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT BẰNG QUAN HỆ SONG SONG

Phương pháp:

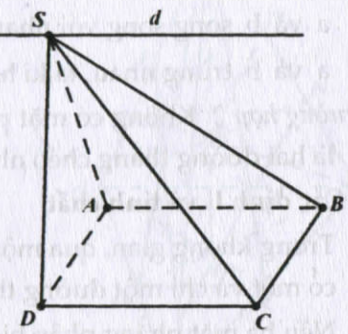
Sử dụng tính chất: Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song d và d' thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng đi qua M song song với d và d'.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \parallel AB \parallel CD, S \in d$.

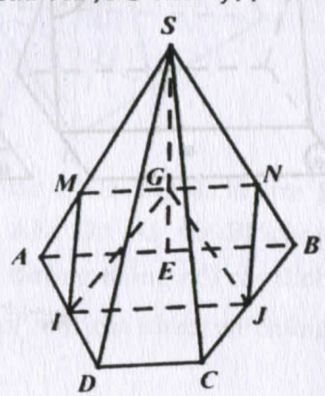
Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

b) Tìm điều kiện của AB và CD để thiết diện của (IJG) và hình chóp là một hình bình hành.

Lời giải

a) Ta có ABCD là hình thang và I, J là trung điểm của AD, BC nên $IJ // AB$.



Vậy $\begin{cases} G \in (SAB) \cap (IJG) \\ AB \subset (SAB) \\ IJ \subset (IJG) \\ AB \parallel IJ \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (IJG) = MN \parallel IJ \parallel AB$ với

$M \in SA, N \in SB$.

b) Dễ thấy thiết diện là tứ giác MNJI.

Do G là trọng tâm tam giác SAB và $MN \parallel AB$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$

(E là trung điểm của AB) $\Rightarrow MN = \frac{2}{3}AB$.

Lại có $IJ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Vì $MN \parallel IJ$ nên MNIJ là hình thang, do đó MNIJ là hình bình hành khi $MN = IJ$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy thiết diện là hình bình hành khi $AB = 3CD$.

Bài toán 01: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Phương pháp:

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể làm theo một trong các cách sau:

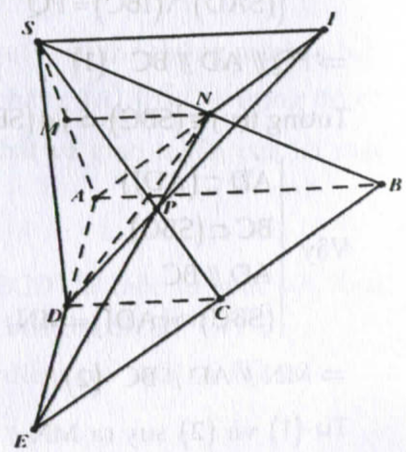
- Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng rồi dùng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.



Lời giải

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

Lại có ABCD là hình thang $\Rightarrow AB // CD$.

Vậy $\begin{cases} MN \parallel AB \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$, trong (SCD) gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset (ADN) \Rightarrow EN \subset (AND) \Rightarrow P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

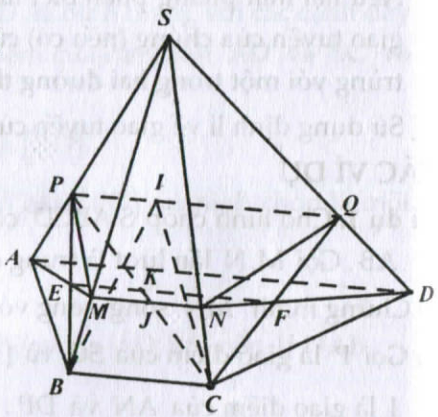
Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \parallel CD$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Giả sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a, b.

Lời giải



a) Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.

Vậy $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD \parallel BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases}$

$\Rightarrow PQ \parallel AD \parallel BC \quad (1)$

Tương tự $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$

Vậy $\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$

$\Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel PQ$.

b) Ta có $E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases}$;

$F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ) \end{cases}$

Do đó $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$.

Mà $\begin{cases} AD \parallel BC \\ MN \parallel PQ \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AD \parallel BC \parallel MN \parallel PQ$.

Tính EF: Gọi $K = CP \cap EF \Rightarrow EF = EK + KF$

Ta có $EK \parallel BC \Rightarrow \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB}$ (1), $PM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{PM}{AB}$

Mà $\dfrac{PM}{AB} = \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{2}{3}$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PE}{PE + EB} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{EB}{PE}} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EK = \dfrac{2}{5}BC = \dfrac{2}{5}b$

Tương tự $KF = \dfrac{2}{5}a$. Vậy $EF = EK + KF = \dfrac{2}{5}(a + b)$.

Bài toán 03: CHỨNG MINH BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Phương pháp:

Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng ta tìm hai đường thẳng a, b lần lượt đi qua hai trong bốn điểm trên và chứng minh a, b song song hoặc cắt nhau, khi đó A, B, C, D thuộc $mp(a, b)$.

Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng qui ta có thể chứng minh a, b, c lần lượt là giao tuyến của hai trong ba mặt phẳng $(\alpha), (\beta), (\delta)$ trong đó có hai giao tuyến cắt nhau. Khi đó theo tính chất về giao tuyến của ba mặt phẳng ta được a, b, c đồng qui.

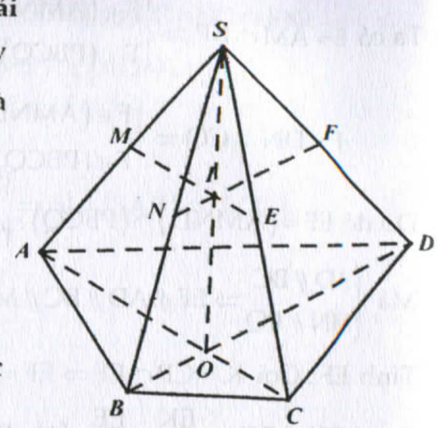
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC và SD.

a) Chứng minh ME, NF, SO đồng qui (O là giao điểm của AC và BD).

b) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Lời giải



a) Trong (SAC) gọi $I = ME \cap SO$, dễ thấy

I là trung điểm của SO, suy ra FI là đường trung bình của tam giác SOD.

Vậy $FI // OD$.

Tương tự ta có $NI // OB$ nên N, I, F thẳng hàng hay $I \in NF$.

Vậy minh ME, NF, SO đồng qui.

b) Do $ME \cap NF = I$ nên ME và NF xác định một mặt phẳng. Suy ra M, N, E, F đồng phẳng.

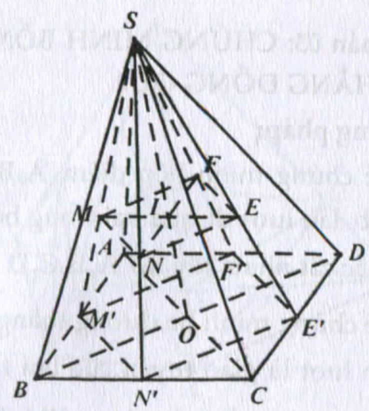
Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA. Chứng minh:

a) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

b) Ba đường thẳng ME, NF, SO đồng qui (O là giao điểm của AC và BD).

Lời giải

a) Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.



Ta có $\dfrac{SM}{SM'} = \dfrac{2}{3}, \dfrac{SN}{SN'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SM}{SM'} = \dfrac{SN}{SN'}$

$\Rightarrow MN // M'N'$ (1).

Tương tự $\dfrac{SE}{SE'} = \dfrac{SF}{SF'} \Rightarrow EF // E'F'$ (2)

Lại có $\begin{cases} M'N' // AC \\ E'F' // AC \end{cases} \Rightarrow M'N' // E'F'$ (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $MN // EF$.

Vậy bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

b) Dễ thấy $M'N'E'F'$ cũng là hình bình hành và $O = M'E' \cap N'F'$.

Xét ba mặt phẳng $(M'SE'), (N'SF')$ và $(MNEF)$ ta có :

$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$ $\quad$ $(M'SE') \cap (MNEF) = ME$

$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$ $\quad$ $ME \cap NF = I$.

Do đó theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng ME, NF, SO đồng qui.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi M là một điểm trên cạnh SC. Xác định giao điểm N của SD với (ABM). Tứ giác ABMN là hình gì?

c) Giả sử $I = AN \cap BM$. Chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định khi M chạy trên cạnh SC.

20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Chứng minh MNPQ là một hình bình hành.

b) Gọi I là một điểm trên cạnh BC. Xác định thiết diện của hình chóp với (IMN).

21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là một điểm thuộc cạnh AD (E khác A và D).

a) Xác định thiết diện của tứ diện với (IJE).

b) Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

22. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

a) Hãy xác định các điểm $I \in AC$ và $J \in DN$ sao cho $IJ // BM$.

b) Tính IJ theo a.

23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC và SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q.

a) Giả sử $MN \cap PQ = I$, $AB \cap CD = E$. Chứng minh I, E, S thẳng hàng.

b) Giả sử $\Delta = (IBC) \cap (IAD)$ và $\Delta \subset (\alpha)$. Chứng minh $MQ // NP // AB // CD$.

24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với $AD // BC$. M là một điểm di động trong tứ giác $ABCD$. Qua M vẽ các đường thẳng song song với SA, SB cắt các mặt (SBC) và (SAD) lần lượt tại N, P.

a) Nêu cách dựng các điểm N, P.

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $MN.MP$ lớn nhất.

25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thang với đáy $AD = a$ và $BC = b$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và SB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADP) và (SBC).

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của (ADP) và (SMN) nằm bên trong hình chóp.

26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SAD, M là điểm trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MIJ).

27. Cho hình chóp S.ABC, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M và song song SA, SB và SC cắt các mặt $(SBC), (SCA), (SAB)$ lần lượt tại các điểm A', B', C'.

a) Nêu cách dựng các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi khi M di động trong tam giác ABC.

c) Xác định vị trí của điểm M để tích $MA'.MB'.MC'$ lớn nhất.

28. Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (α) cắt bốn cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm M, N, P, Q.

Chứng minh: $MA.NB.PC.QD \le \frac{AB.BC.CD.AD}{16}$. Khi đẳng thức xảy ra thì MNPQ là hình gì?

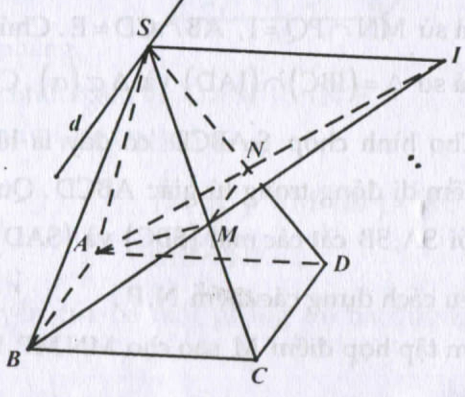
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

19. a) Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \parallel AB \parallel CD, S \in d$.

b) Ta có $\begin{cases} M \in (SCD) \cap (ABM) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (ABM) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = d' \parallel AB$ $M \in d'$.

Trong (SCD) gọi $N = d' \cap SD$



$\Rightarrow N = SD \cap (ABM)$

Do $MN \parallel AB$ nên tứ giác ABMN là hình thang.

c) Gọi $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$ thì Δ cố định.

Vì $I = AN \cap BM \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (SAD) \\ I \in BM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in \Delta$.

Vậy $I \in \Delta$ cố định.

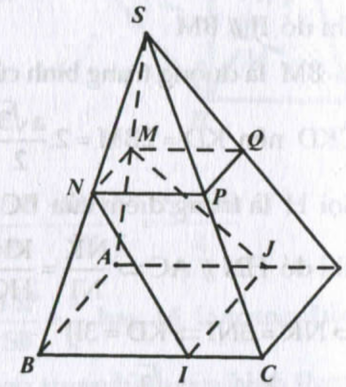
20.

a) Ta có $MN \mathbin{/\!\!/=} \frac{1}{2}AB$ và $PQ \mathbin{/\!\!/=} \frac{1}{2}CD$ mà $AB \mathbin{/\!\!/=} CD$ nên $MN \mathbin{/\!\!/=} PQ$.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

b) Ta có $\begin{cases} I \in (IMN) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ MN \subset (IMN) \\ AB \parallel MN \end{cases}$

$\Rightarrow (IMN) \cap (ABCD) = IJ \parallel AB \parallel MN$ với $J \in AD$. Thiết diện của hình chóp với (IMN) là hình thang MNIJ.



21. a) Ta có $\begin{cases} F \in (IJF) \cap (ACD) \\ IJ \subset (IJF), CD \subset (ACD) \\ IJ \parallel CD \end{cases}$

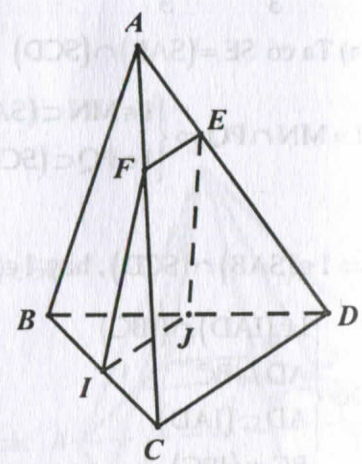
$\Rightarrow (IJF) \cap (ACD) = FE \parallel CD \parallel IJ$.

Thiết diện là tứ giác IJEF.

b) Để thiết diện IJEF là hình bình hành thì

$IJ \mathbin{/\!\!/=} EF$ mà $IJ \mathbin{/\!\!/=} \frac{1}{2}CD$ nên $EF \mathbin{/\!\!/=} \frac{1}{2}CD$,

hay EF là đường trung bình trong tam giác ACD ứng với cạnh CD do đó E là trung điểm của AD.

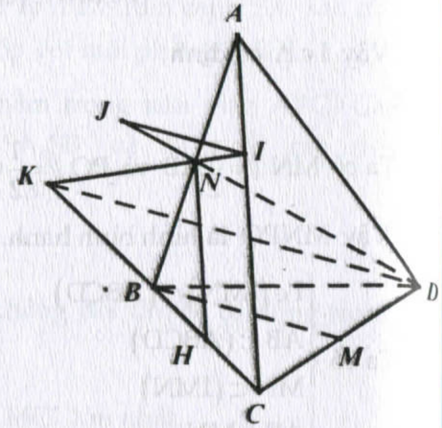


c) Để thiết diện IJEF là hình thoi thì trước tiên nó phải là hình bình hành, khi đó E là trung điểm của AD. Mặt khác IJEF là hình thoi thì $IJ = IF$, mà $IJ = \frac{1}{2}CD, IF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = CD$.

Vậy điều kiện để thiết diện là hình thoi là tứ diện ABCD có $AB = CD$ và E là trung điểm của AD.

22. a) Trong (BCD), từ D kẻ đường thẳng song song với BM cắt BC tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong (IKD), từ I kẻ đường thẳng song song với DK cắt DN tại J.

Khi đó $IJ \parallel BM$.



b) Do BM là đường trung bình của tam giác CKD nên $KD = 2BM = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của BC.

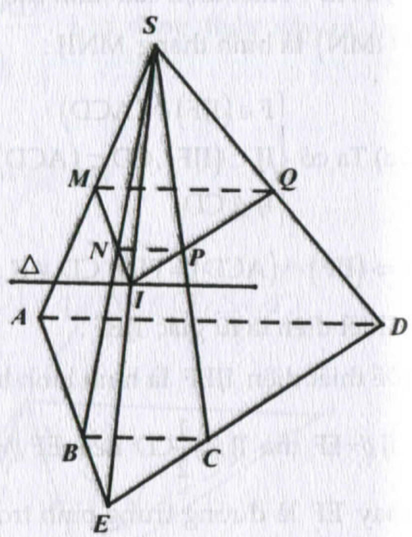
Khi đó $HN \parallel AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$

$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ$

$\Rightarrow IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

23. a) Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$

$I = MN \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MN \subset (SAB) \\ I \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$



$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SE$.

b) Do $\begin{cases} I \in (IAD) \cap (IBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (IAD) \\ BC \subset (IBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (IAD) \cap (IBC) = \Delta \parallel AB \parallel DC, I \in \Delta$

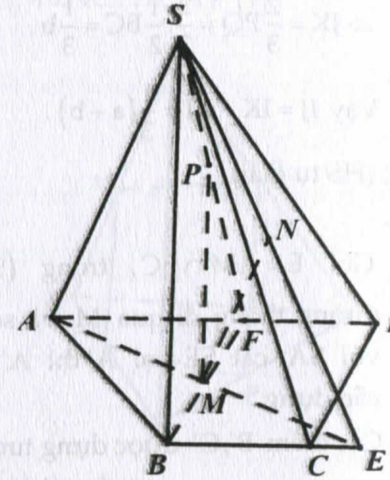
Mặt khác theo giả thiết $\Delta \subset (\alpha)$ nên

$\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ \Delta \parallel BC \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel BC \parallel \Delta$

Tương tự ta cũng có $MQ \parallel AD \parallel \Delta$.

Vậy $MQ \parallel NP \parallel AB \parallel DC \parallel \Delta$.

24. a) Gọi $E = AM \cap BC, F = BM \cap AD$. Từ M kẻ các đường thẳng song song với SA,SB lần lượt cắt SE,SF tại N,P. Thì N,P là các điểm cần dựng.



b) Ta có $\frac{MN}{SA} = \frac{EM}{EA}, \frac{MP}{SB} = \frac{FM}{FB} = \frac{AM}{AE}$ nên

$\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB} = \frac{EM}{EA} + \frac{AM}{EA} = 1$.

Theo BĐT CauChy ta có

$MN.MP = SA.SB.\frac{MN}{SA}.\frac{MP}{SB} \le \frac{SA.SB}{4}\left(\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB}\right)^2 = \frac{SA.SB}{4}$

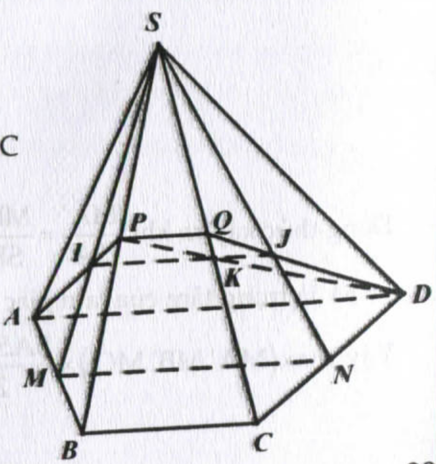
Vậy $\max(MN.MP) = \frac{SA.SB}{4}$ khi $\frac{MN}{SA} = \frac{MP}{SB} = \frac{1}{2}$ hay M là trung điểm của AE và BF, do đó tập hợp điểm M là đường trung bình của hình thang ABCD.

25.

a) Ta có $\begin{cases} P \in (ADP) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (ADP) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (ADP) \cap (SBC) = PQ \parallel AD \parallel BC, Q \in SC$

b) Gọi $I = AP \cap SM, J = DQ \cap SN$ thì $IJ = (ADP) \cap (SMN)$.



Dễ thấy I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD.

Gọi $K = IJ \cap PD$, ta có $IJ = IK + KJ$.

Ta có $\frac{IK}{AD}=\frac{PI}{PA}=\frac{1}{3}\Rightarrow IK=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}a$.

Tương tự $\frac{JK}{PQ}=\frac{DI}{DQ}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow JK=\frac{2}{3}PQ=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}BC=\frac{1}{3}b$.

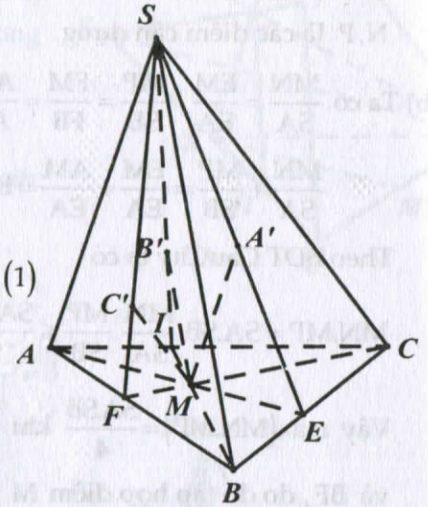
Vậy $IJ=IK+KJ=\frac{1}{3}(a+b)$.

26. (HS tự giải)

27.

a) Gọi $E=AM\cap BC$, trong (SAE) vẽ đường thẳng đi qua M và song song với SA cắt SE tại A' thì A' là điểm cần dựng.

Các điểm B', C' được dựng tương tự.



b) Ta có $MA'\,//\,SA$ nên $\frac{MA'}{SA}=\frac{EM}{AE}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$ (1)

Tương tự $\frac{MB'}{SB}=\frac{IM}{IB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}$ (2)

$\frac{MC'}{SC}=\frac{FM}{FC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ (3)

Cộng các đẳng thức $(1),(2),(3)$ ta được $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$

c) Ta có $MA'.MB'.MC'=SA.SB.SC.\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$

$$\le SA.SB.SC\left(\frac{\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}}{3}\right)^3=\frac{SA.SB.SC}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{EM}{EA}=\frac{IM}{IB}=\frac{FM}{FC}$

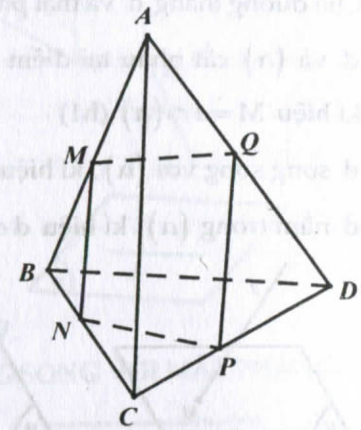
$\Rightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy $\max(MA'.MB'.MC')=\frac{SA.SB.SC}{27}$.

28. Trước tiên do M, N, E, F đồng phẳng nên theo định lí Menelauyt trong không gian ta có $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$.

Do đó $(MA.NB.PC.QD)^2=(MA.NB.PC.QD)(MB.NC.PD.QA)$ (1)

Theo BĐT Cauchy ta có



$MA.MB\le\left(\frac{MA+MB}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$

$NB.NB\le\left(\frac{NB+NC}{2}\right)^2=\frac{BC^2}{4}$

$PC.PD\le\left(\frac{PC+PD}{2}\right)^2=\frac{CD^2}{4}$

$QD.QA\le\left(\frac{QD+QA}{2}\right)^2=\frac{AD^2}{4}$

Nhân theo vế các BĐT trên và kết hợp với (1) thu được:

$$MA.NB.PC.QD\le\frac{AB.BC.CD.AD}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên MNPQ là hình bình hành.

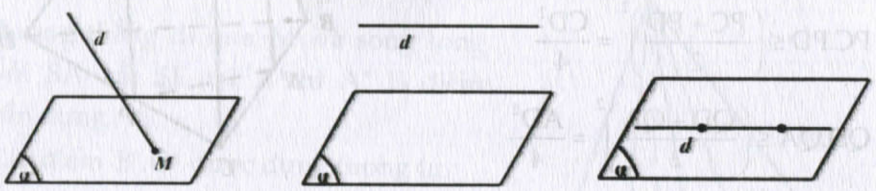
Đường thẳng và mặt phẳng song song

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta có ba vị trí tương đối giữa chúng là:

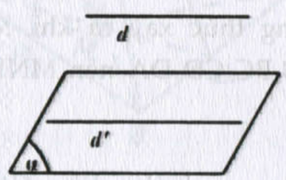
- d và (α) cắt nhau tại điểm M, kí hiệu $\{M\} = d \cap (\alpha)$ hoặc để đơn giản ta kí hiệu $M = d \cap (\alpha)$ (h1)
- d song song với (α), kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \,//\, d$ (h2)
- d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$ (h3)



h1 h2 h3

2. Các định lí và tính chất.

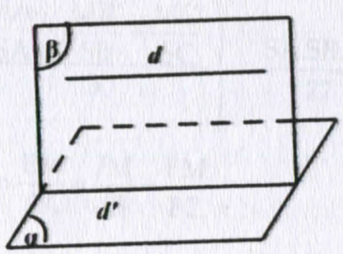
- Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).



h3

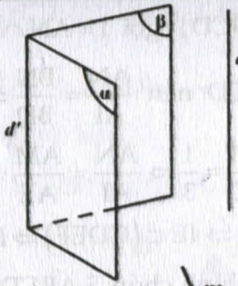
Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$

- Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' // d$.



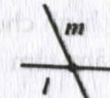
Vậy $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \,//\, d.$

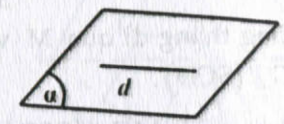
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Vậy $\begin{cases} (\alpha) \,//\, d \\ (\beta) \,//\, d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \,//\, d.$

- Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



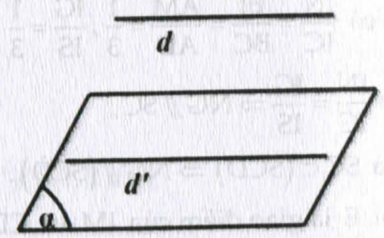


B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để chứng minh đường thẳng d songsong với mặt phẳng (α) ta chứng minh d song song với một đường thẳng d' nằm trong (α).



h3

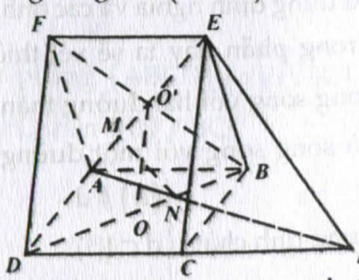
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

a) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE, BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

Lời giải



a) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF ứng với cạnh DF nên $OO' \,//\, DF$, $DF \subset (ADF)$

$\Rightarrow OO' \,//\, (ADF)$.

Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác ACE ứng với cạnh CE nên $OO' \,//\, CE$, $CE \subset (CBE) \Rightarrow OO' \,//\, (BCE)$.

b) Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB \,//\, CD$ nên $\dfrac{AN}{AI} = \dfrac{BN}{BD} \Rightarrow \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{1}{3}$.

Lại có $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{AM}{AE} \Rightarrow MN \,//\, IE$.

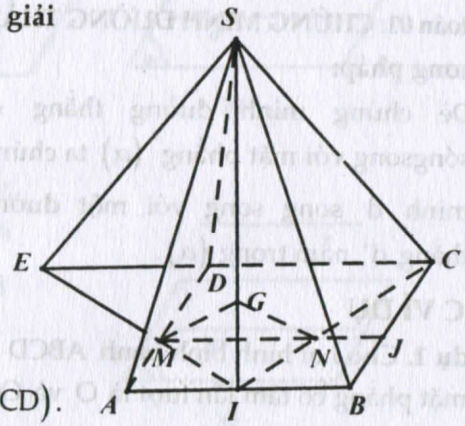
Mà $I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF) \Rightarrow MN \,//\, (CDEF)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AD$.

a) Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \,//\, (SCD)$.

b) Chứng minh $MG \,//\, (SCD)$.

Lời giải



a) Ta có $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{IG}{IS} \Rightarrow NG \,//\, SC$,

mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow NG \,//\, (SCD)$.

b) Gọi E là giao điểm của IM và CD

Ta có $\dfrac{IM}{IE} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{IM}{IE} = \dfrac{IG}{IS}$

$\Rightarrow MG \,//\, SE$, $SE \subset (SCD) \Rightarrow GM \,//\, (SCD)$.

Bài toán 02: DỰNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong phần này ta sẽ xét thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng; để xác định thiết diện loại này ta sử dụng tính chất: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d' \,//\, d, M \in d'$.

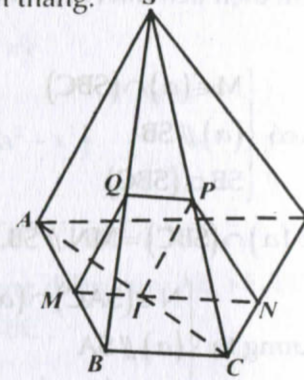
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MQ \,//\, SA, Q \in SB$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap MN$

$\begin{cases} I \in MN \subset (\alpha) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SAC)$

Vậy $\begin{cases} I \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = IP \,//\, SA, P \in SC$

Từ đó ta có $(\alpha) \cap (SBC) = PQ, (\alpha) \cap (SAD) = NP$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang khi $MN \,//\, PQ$ hoặc $MQ \,//\, NP$.

Trường hợp 1: Nếu $MQ \,//\, NP$ thì ta có $\begin{cases} MQ \,//\, NP \\ MQ \,//\, SA \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, NP$

Mà $NP \subset (SCD) \Rightarrow SA \,//\, (SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2: Nếu $MN \,//\, PQ$ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD), (\alpha), (SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, BC, PQ nên $MN \,//\, BC$.

Đảo lại nếu $MN \,//\, BC$ thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

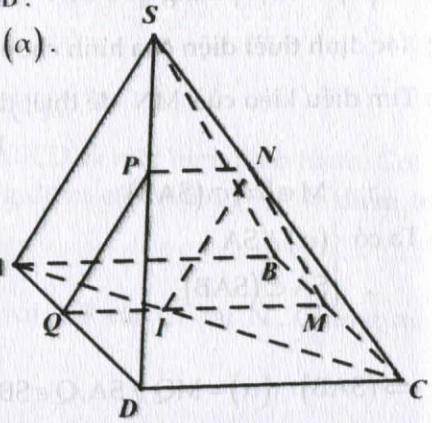
$\Rightarrow MN \,//\, PQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ là hình thang thì điều kiện là $MN \,//\, BC$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x\ (0 < x < a)$, (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.



Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) \,/\!/\, SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MN \,/\!/\, SB,\ N \in SC$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,/\!/\, SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = NI \,/\!/\, SA, I \in AC$

Trong (ABCD) gọi $Q = MI \cap AD$, thì ta có

$\begin{cases} Q \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \,/\!/\, SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = QP \,/\!/\, SA, P \in SD$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

b) Do $MN \,/\!/\, SB \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)

Lại có $IN \,/\!/\, SA \Rightarrow \dfrac{CI}{CA} = \dfrac{CN}{CS}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CI}{CA} \Rightarrow IM \,/\!/\, AB$

Mà $AB \,/\!/\, CD \Rightarrow IM \,/\!/\, CD$.

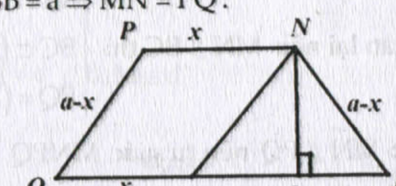
Ba mặt phẳng (α), (ABCD) và (SCD) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MQ, CD, NP với $MQ \,/\!/\, CD \Rightarrow MQ \,/\!/\, NP$.

Vậy MNPQ là hình thang.

Ta có $\dfrac{MN}{SB} = \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{PQ}{SA}$, mà $SA = SB = a \Rightarrow MN = PQ$.

Do đó MNPQ là hình thang cân.

Từ $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MN = a - x$,



$\dfrac{PN}{DC} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{BM}{BC} \Rightarrow PN = BM = x$,

$\dfrac{IM}{AB} = \dfrac{CM}{CB} \Rightarrow IM = CM = a - x$

Gọi J là trung điểm của IM thì

$$NJ = \sqrt{MN^2 - MJ^2} = \sqrt{(a-x)^2 - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}NJ(MQ + NP) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(a+x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

29. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC; G_1, G_2 tương ứng là trọng tâm các tam giác SAB, SBC.

a) Chứng minh $MN \,/\!/\, (SAC)$.

b) $G_1G_2 \,/\!/\, (SAC)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (BG_1G_2).

30. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{PD}{AD}$.

a) Chứng minh $MN \,/\!/\, (ABCD)$.

b) $SD \,/\!/\, (MNP)$.

c) $NP \,/\!/\, (SCD)$.

31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC.

32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua M, song song với BD và SA.

33. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên hai cạnh SB và CD, (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với SC.

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

34. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

a) $OO' // (BCD)$ là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$.

b) $OO' // (CBD)$ và $OO' // (ACD)$ là $BC = BD$ và $AC = AD$.

35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SC; (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh SB, SD. Tính các tỉ số $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}}; \frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}}$.

c) Gọi $K = ME \cap CB, J = MF \cap CD$. Chứng minh A, K, J nằm trên một đường thẳng song song với EF.

36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (ABM) và (SCD); (SMN) và $(ABCD)$.

b) Chứng minh $MN // (ABC)$.

c) Gọi d là giao tuyến của (SCD) và (ABM) còn I, J lần lượt là các giao điểm của d với SD, SC. Chứng minh $IN // (ABC)$.

d) Tìm các giao điểm P, Q của MC với (SAB), AN với (SCD). Chứng minh S, P, Q thẳng hàng.

37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. M là một điểm di động trên cạnh SC, (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Chứng minh (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tìm các giao điểm H, K của (α) với SB, SD. Chứng minh $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

b) Thiết diện của hình chóp với (α) có thể là hình thang được không?

38. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c$ với. Một mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng AB và CD cắt các cạnh của tứ diện theo một thiết diện là hình thoi. Tính diện tích của thiết diện.

39. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho $MA = PC = x$, $(0 < x < a)$. Một mặt phẳng qua MP song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a) Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua AB và cắt SC, SD tại M, N.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

b) Chứng minh giao điểm I của AM và BN luôn thuộc một đường thẳng cố định.

c) Chứng minh giao điểm K của AN và BM luôn thuộc một đường thẳng cố định và $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK}$ không đổi.

41. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

a) Chứng minh $AB' // (A'IC)$.

b) M là một điểm thuộc cạnh $A'C'$, $AM \cap A'C = P, B'M \cap A'I = Q$. Chứng minh $PQ // AB'$. Tìm vị trí của M để $S_{\Delta A'PQ} = \frac{2}{9} S_{\Delta A'CI}$.

42. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. I, G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC' và $A'B'C'$. Chứng minh

a) $IG // (ABC')$.

b) $GK // (BB'C'C)$.

43. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. I là trung điểm của cạnh AC, J là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. M là một điểm di động trong tam giác BCD sao cho $(MIJ) // AB$.

a) Tìm tập hợp điểm M.

b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi (MIJ).

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

29.

a) Ta có $\begin{cases} MN // AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAC)$.

b) G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SBC nên

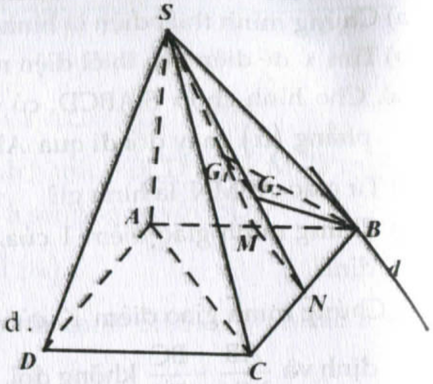
$\frac{SG_1}{SM} = \frac{SG_2}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // MN$ mà $MN // AC$

$\Rightarrow G_1G_2 // AC$.

Vậy $\begin{cases} G_1G_2 \,//\, AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (SAC)$.

c) Ta có $\begin{cases} B \in (ABC) \cap (BG_1G_2) \\ NM \subset (ABC) \\ G_1G_2 \subset (BG1G_2) \\ MN \,//\, G_1G_2 \end{cases}$

$\Rightarrow (ABC) \cap (BG_1G_2) = d \,//\, MN \,//\, G_1G_2, B \in d$.



30. a) Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN \,//\, AB$

Vậy $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (ABCD)$.

b) Tương tự $\frac{SM}{SA} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow SD \,//\, MP$

mà $MP \subset (MNP) \Rightarrow SD \,/\, (MNP)$.

c) Kẻ $NR \,//\, BC, R \in SC$, kẻ $RQ \,//\, SB, Q \in BC$ thì ta có

$\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC}$ (1) và $\frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}$ (2),

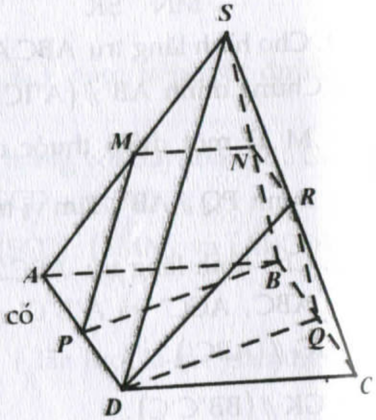
mặt khác $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có $\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow BQ = PD$.

Lại có $NR = BQ \Rightarrow NR = PD$.

Thêm nữa $\begin{cases} NR \,//\, BQ \\ PD \,//\, BQ \end{cases} \Rightarrow NR \,//\, PD$ nên PDRN là hình bình hành, từ đó ta có

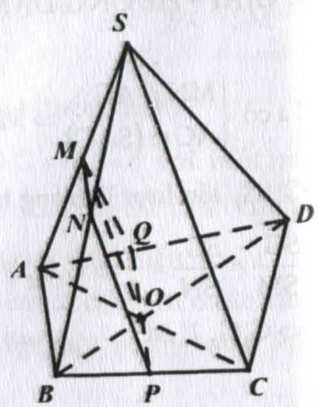
$\begin{cases} NP \,//\, DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, (SCD)$.



31. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với AB và SC

Ta có $\begin{cases} O \in (P) \cap (SAC) \\ SC \subset (SAC) \\ SC \,//\, (P) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (P) = OM \,//\, SC, O \in SA$.



Tương tự $\begin{cases} N \in (SAB) \cap (P) \\ AB \subset (SAB) \\ AB \,//\, (P) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (P) = MN \,//\, AB, N \in SB$.

$\begin{cases} N \in (P) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC \,//\, (P) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (P) = NP \,//\, SC,\ P \in BC$.

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = PO \cap AD$ thì thiết diện là tứ giác MNPQ.

32. Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \,//\, BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \,//\, BD, N \in AD$

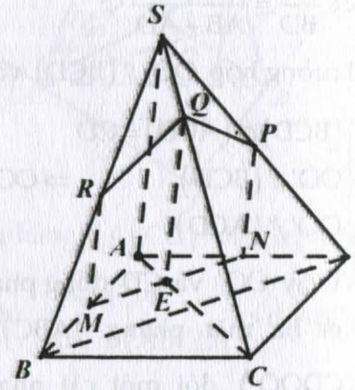
Tương tự $(\alpha) \cap (SAD) = NP \,//\, SA, P \in SD$

$(\alpha) \cap (SAB) = MR \,//\, SA, R \in SB$

Gọi $E = MN \cap AC$ thì:

$(\alpha) \cap (SAC) = EQ \,//\, SA, Q \in SC$

Thiết diện là ngũ giác MNPQR.



33. Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC \,//\, (\alpha) \end{cases}$

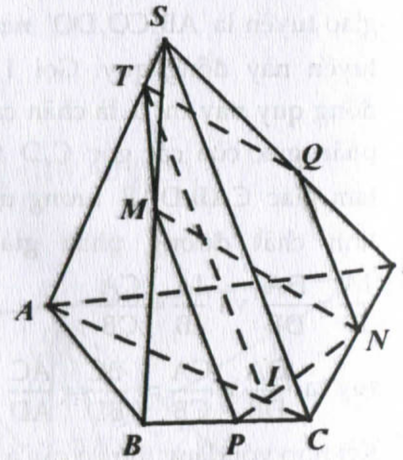
$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MP \,//\, SC, P \in BC$.

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = NQ \,//\, SC, Q \in SD$

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap PN$ thì:

$(\alpha) \cap (SAC) = IT \,//\, SC, T \in SA$

Thiết diện là ngũ giác MPNQT.

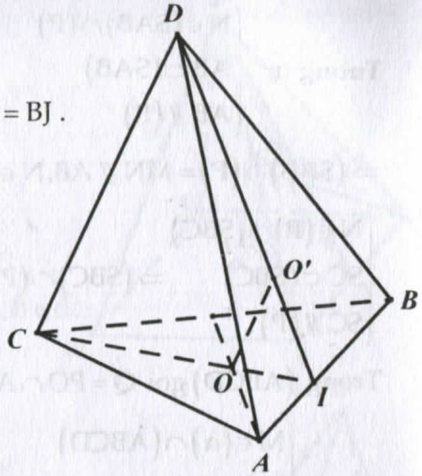


34.

a) Gọi $I = AO \cap BC, J = AO' \cap BD$ ta có $(AOO') \cap (BCD) = IJ$

Do đó $OO' \,//\, (BCD) \Leftrightarrow OO' \,//\, IJ \Leftrightarrow \frac{OA}{OI} = \frac{O'A}{O'J}$ (1).

Mặt khác ta có $\frac{OA}{OI}=\frac{AB}{BI}$ (2)



$\frac{O'A}{O'J}=\frac{AB}{BJ}$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra $BI=BJ$.

Lại có $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{IB}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$

và $\frac{JB}{JD}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{JB}{BD}=\frac{AB}{AB+AD}$

nên $IB=JB\Leftrightarrow\frac{AB.BC}{AB+AC}=\frac{AB.BD}{AB+AD}$

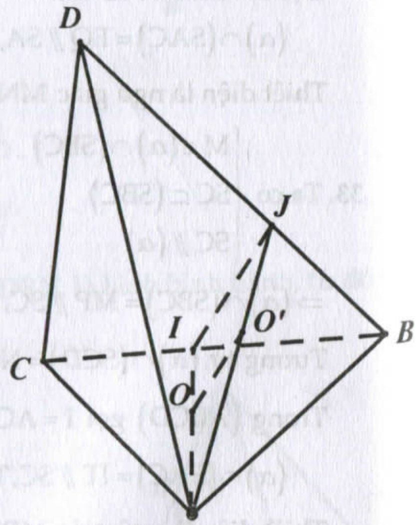
$\Leftrightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}$.

b) Trường hợp $OO'\,//\,(BCD)$ và $OO'\,//\,(ACD)$ thì ta có

$$\begin{cases}(BCD)\cap(ACD)=CD\\ OO'\,//\,(BCD)\\ OO'\,//\,(ACD)\end{cases}\Rightarrow OO'\,//\,CD.$$

Vì vậy OO' và CD đồng phẳng.

Xét ba mặt phẳng (ABC), (ABD), $(CDOO')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là AB, CO, DO' nên ba giao tuyến này đồng quy. Gọi I là điểm đồng quy này thì I là chân các đường phân giác của các góc C, D trong các tam giác CAB, DAB tương ứng. Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{IA}{IB}=\frac{DA}{DB}$ và $\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CB}$



suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$

Kết hợp với đẳng thức ở câu a ta có:

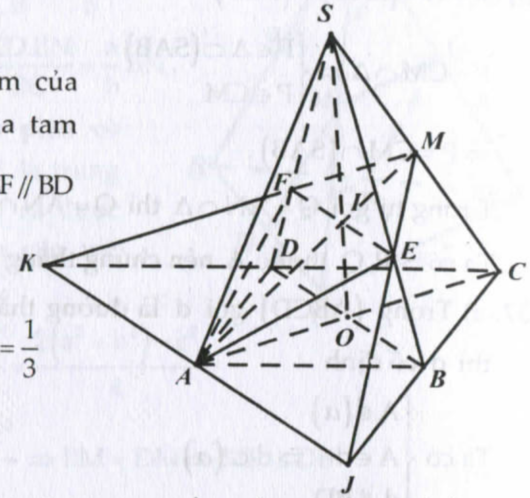
$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB+AC-AC}{AB+AD-AD}=\frac{AB}{AB}=1$ (Tính chất dãy tỉ số bằng nhau).

Vậy $BC=BD, AC=AD$.

35. a) Gọi $O=AC\cap BD, I=SO\cap AM$.

Ta có $\begin{cases}BD\,//\,(\alpha)\\ BD\subset(SBD)\\ I\in(\alpha)\cap(SBD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=EF\,//\,BD, E\in SB, F\in SD, I\in EF$

Thiết diện là tứ giác AEMF.



b) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SC nên I là trọng tâm của tam giác SAC $\Rightarrow\frac{IS}{IO}=\frac{2}{3}$, mặt khác $EF\,//\,BD$

nên $\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Từ đó ta có $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SE}{SB}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Và $\frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SF}{SD}=\frac{1}{3}$.

c) Dễ thấy K, A, J là điểm chung của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (α) nên chúng thẳng hàng. Gọi $d=(\alpha)\cap(ABCD)$ thì $\begin{cases}BD\,//\,(\alpha)\\ BD\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow d\,//\,BD$,

mà $BD\,//\,EF\Rightarrow d\,//\,EF$.

Vậy K, A, J thuộc đường thẳng d song song với EF.

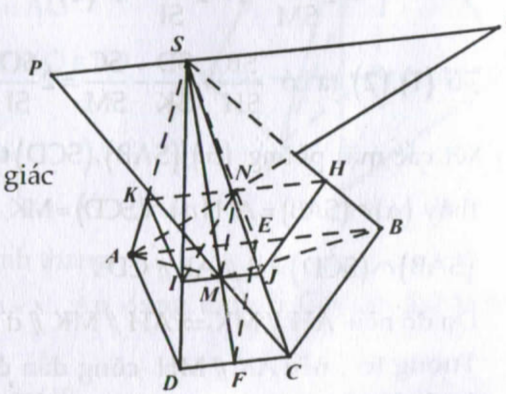
36.

a) Ta có $\begin{cases}M\in(ABM)\cap(SCD)\\ AB\,//\,(SCD)\\ AB\cap(ABM)\end{cases}\Rightarrow(ABM)\cap(SCD)=IJ\,//\,AB\,//\,CD,$

$M\in IJ, I\in SD, J\in SC$.

Gọi $E=SN\cap AB, F=SM\cap CD$

$\Rightarrow EF=(SMN)\cap(ABCD)$.



b) Do M, N là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB nên:

$\frac{SM}{SF}=\frac{2}{3},\frac{SN}{SE}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{SM}{SF}=\frac{SN}{SE}$

$\Rightarrow MN\,//\,EF$,

$EF\subset(ABCD)\Rightarrow MN\,//\,(ABCD)$.

c) Ta có $IJ // CD \Rightarrow \frac{SI}{SD} = \frac{SM}{SF} = \frac{SN}{SE} \Rightarrow IN // DE,\ DE \subset (ABC)$

$\Rightarrow IN // (ABC)$.

d) Gọi $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$

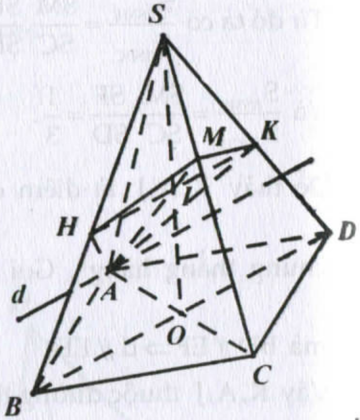
$P = CM \cap \Delta \Rightarrow \begin{cases} P \in \Delta \subset (SAB) \\ P \in CM \end{cases}$

$\Rightarrow P = CM \cap (SAB)$.

Tương tự gọi $Q = AN \cap \Delta$ thì $Q = AN \cap (SCD)$.

Ta có S, P, Q thuộc Δ nên chúng thẳng hàng.

37. a) Trong $(ABCD)$ gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BD thì d cố định



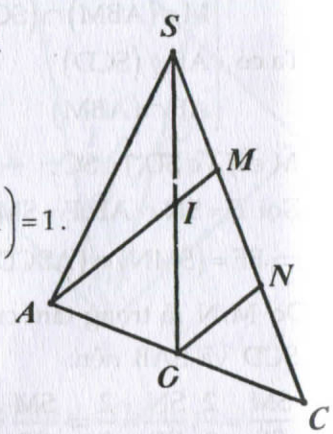
Ta có $\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in d \\ d // BD \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha)$.

Vậy (α) luôn chứa đường thẳng d cố định.

b) Gọi $I = AM \cap HK$, thế thì $\frac{SB}{SH} = \frac{SD}{SK} = \frac{SO}{SI}$

nên $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{2SO}{SI}$ (1).

Gọi N là trung điểm của MC,



Ta có $\frac{SC}{SM} = \frac{SN + NC}{SM} = \frac{SN}{SM} + \frac{NC}{SM} = \frac{SN}{SM} + \frac{SN - SM}{SM}$

$= 2\frac{SN}{SM} - 1 = 2\frac{SO}{SI} - 1$ (2).

Từ (1),(2) ta có $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM} = 2\frac{SO}{SI} - \left(2\frac{SO}{SI} - 1\right) = 1$.

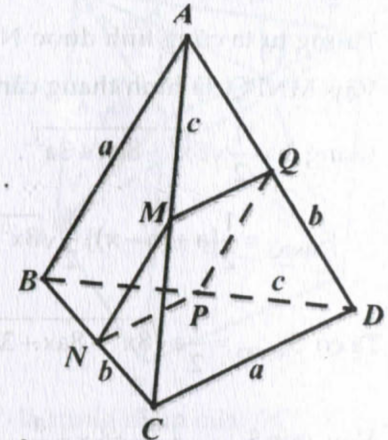
c) Xét các mặt phẳng $(\alpha), (SAB), (SCD)$ ta thấy $(\alpha) \cap (SAB) = AH, (\alpha) \cap (SCD) = MK$,

$(SAB) \cap (SCD) = d // AB // CD$.

Do đó nếu $AH // MK \Rightarrow AH // MK // d \Rightarrow AH // AH$ (vô lí).

Tương tự, nếu $AK // MH$ cũng dẫn đến vô lí. Vậy thiết diện không thể là hình thang.

38. Giả sử (α) cắt các cạnh AC, CB, BD, DA theo thứ tự tại M, N, P, Q thì MNPQ là hình bình hành.



Ta có $MN // AB // PQ$ và $MQ // CD // NP$

Do đó $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow MN = \frac{CN.AB}{CB} = \frac{a}{b}CN$

Tương tự $\frac{NP}{CD} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow NP = \frac{CD.BN}{BC} = \frac{a}{b}BN$.

Để MNPQ là hình thoi ta phải có $MN = NP \Rightarrow CN = BN$ hay N là trung điểm của BC. Từ đó ta suy ra được M, P, Q cũng là trung điểm của các cạnh AC, BD, AD.

Ta có $BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$.

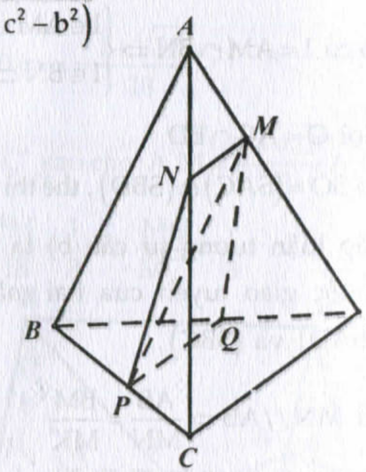
Tương tự $DM^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \Rightarrow BM = DM \Rightarrow MP \perp DB$

Do đó $MP^2 = BM^2 - BP^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

Tương tự ta tính được $NQ^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = MP.NQ = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$

39. a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ACD) \\ CD \subset (ACD) \\ CD // (\alpha) \end{cases}$



$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MN // CD, N \in AC$

Tương tự $(\alpha) \cap (BCD) = PQ // CD, Q \in BD$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Vì $\begin{cases} MN // CD \\ PQ // CD \end{cases}$

$\Rightarrow MN // PQ$ nên MNPQ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = CP = x$, $DM = a - x$, Áp dụng định lí Cô-sin cho tam giác DMQ ta có

$MQ^2 = DM^2 + DQ^2 - 2DM.DQ\cos 60^0$

$\Rightarrow MQ^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\frac{1}{2} = 3x^2 - 3ax + a^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$.

Tương tự ta cũng tính được $NP = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2} \Rightarrow MP = NQ$.

Vậy MNPQ là hình thang cân. Dễ thấy $MN = x, PQ = a - x$, đường cao hình thang $h = \frac{1}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}$.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}[a + (a - x)].\frac{1}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

b) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \ge \frac{a^2}{2}$.

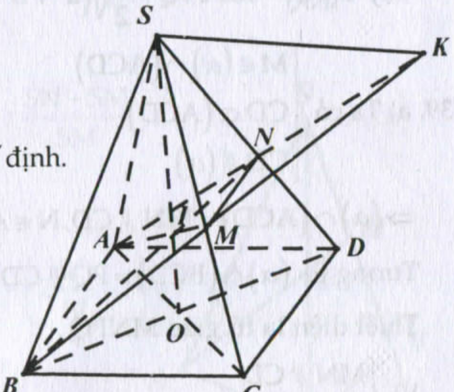
Vậy $\min S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

40.

a) Ta có $\begin{cases} AB /\!/ CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB /\!/ (SCD)$.

Do đó $\begin{cases} AB /\!/ (SCD) \\ AB \subset (\alpha) \\ (\alpha) \cap (SCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN /\!/ AB$, hay ABMN là hình thang.

b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases}$.



Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$, thế thì $I \in SO$ cố định.

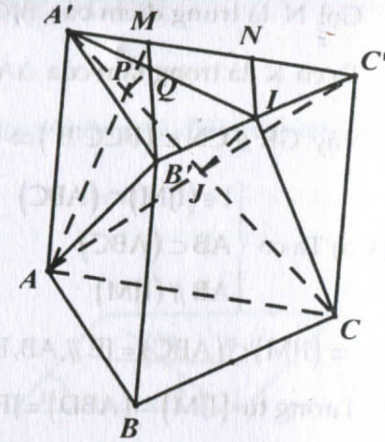
c) Lập luận tương tự câu b) ta được K thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vì $MN /\!/ AB \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BM}{MK}$

Tương tự $SK /\!/ BC \Rightarrow \frac{BC}{SK} = \frac{MB}{MK}$ suy ra $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = 0$ không đổi.

41. a) Gọi $J = AC' \cap A'C$ thì IJ là đường trung bình của tam giác C'B'A nên $IJ /\!/ AB'$.

Vậy $\begin{cases} IJ \subset (A'IC) \\ AB' /\!/ IJ \end{cases} \Rightarrow AB' /\!/ (A'IC)$.



b) Ta có $\begin{cases} AB' /\!/ (A'IC) \\ AB' \subset (MA'B) \\ (MA'B) \cap (A'IC) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ /\!/ A'B$.

Đặt $\frac{A'M}{A'C'} = x \ (0 < x < 1)$.

Ta có $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{A'P.A'Q}{A'C.A'I}$

Do $A'M /\!/ AC$ nên $\frac{A'P}{A'C} = \frac{A'M}{AC} = x$. Gọi N là trung điểm của AC' thì ta có

$$\frac{A'Q}{A'I} = \frac{A'M}{A'N} = \frac{A'M}{A'C' - NC'} = \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}C'M}$$

$$= \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}(A'C' - A'M)} = \frac{2A'M}{A'C' + A'M} = \frac{2\frac{A'M}{A'C'}}{1 + \frac{A'M}{A'C'}} = \frac{2x}{1+x}$$

$\Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2x^2}{1+x}$.

Do đó $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{37}}{18}$.

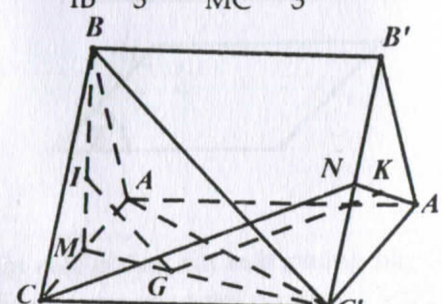
Vậy để $S_{\Delta A'PQ} = \frac{2}{9}S_{\Delta A'CI}$ thì M nằm trên A'C' sao cho $A'M = \frac{1+\sqrt{37}}{18}A'C'$.

42. a) Gọi M là trung điểm của cạnh AC thì $\frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3}$.

Do đó $\frac{IM}{IB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG /\!/ BC'$

Vậy $IG /\!/ BC' \subset (ABC')$

$\Rightarrow IG /\!/ (ABC')$.



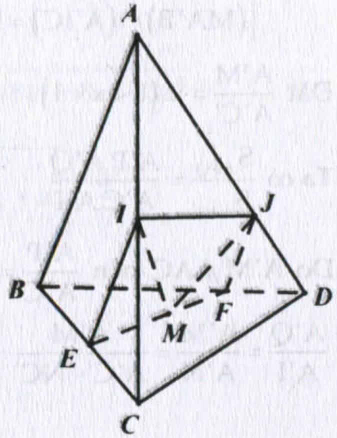
b) Dễ thấy C, G, A' thẳng hàng và $AC /\!/ A'C' \Rightarrow \frac{A'G}{GC} = \frac{C'G}{GM} = 2$

Gọi N là trung điểm của B'C'

Ta có K là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ nên $\dfrac{A'K}{A'N} = 2 \Rightarrow \dfrac{A'G}{GC} = \dfrac{A'K}{A'N} \Rightarrow GK \,//\, CN$.

Vậy $GK \,//\, CN \subset (BCC'B') \Rightarrow GK \,//\, (BCC'B')$.

43. a) Ta có $\begin{cases} I \in (IJM) \cap (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ AB \,//\, (IJM) \end{cases}$



$\Rightarrow (IJM) \cap (ABC) = IE \,//\, AB, E \in BC$.

Tương tự $(IJM) \cap (ABD) = JF \,//\, AB, F \in BD$

Từ đó ta thấy $EF = (MIJ) \cap (BCD)$

mà $M \in (MIJ) \cap (BCD) \Rightarrow M \in EF$.

Vậy tập hợp điểm M là đoạn EF.

b) Do $\begin{cases} IE \,//\, AB \\ JF \,//\, AB \end{cases}$ nên thiết diện IEFJ là hình thang.

Dễ thấy $JF = \dfrac{a}{3}, IE = \dfrac{a}{2}$. Áp dụng định lí Côsin ta có:

$$IJ^2 = AI^2 + AJ^2 - 2AIAJ\cos 60^0 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{1}{2} = \frac{13a^2}{36}.$$

Tương tự ta cũng có $IE^2 = \dfrac{13a^2}{36}$, do đó IEFJ là hình thang cân và không khó khăn gì ta có thể tính được diện tích thiết diện là $S = \dfrac{a^2 5\sqrt{51}}{144}$.

Hai mặt phẳng song song

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

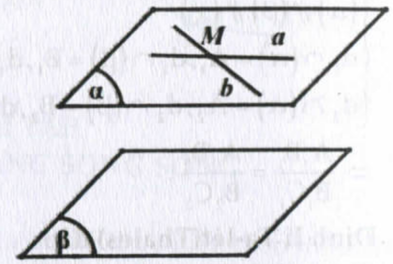
1. Định nghĩa.

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu $(\alpha) \,//\, (\beta)$.

Vậy $(\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$.

2. Định lý và tính chất.

- Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha) \,//\, (\beta)$.



Vậy $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a \,//\, (\beta), b \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta)$.

- Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1

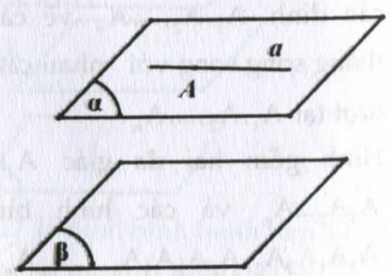
Nếu $d \,//\, (\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.

Hệ quả 3

Cho điểm không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng qua A song song với (α).



Vậy $\begin{cases} A \notin (\alpha), A \in (\beta) \\ A \in d \\ d \,//\, (\alpha) \\ (\beta) \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \subset (\beta)$.

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

Vậy $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\delta)\cap(\alpha)=a\end{cases}\Rightarrow(\delta)\cap(\beta)=b//a$.

Hệ quả

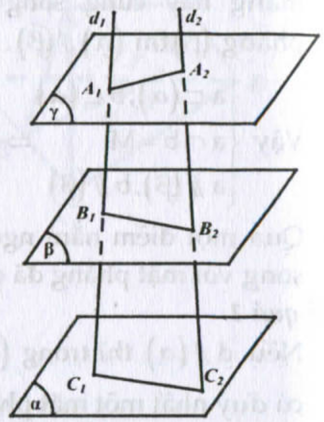
Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

3. Định lí Ta-lét (Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)//(\chi)\\d_1\cap(\alpha)=A_1,d_1\cap(\beta)=B_1,d_1\cap(\chi)=C_1\\d_2\cap(\alpha)=A_2,d_2\cap(\beta)=B_2,d_2\cap(\chi)=C_2\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=\dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.



Định lí Ta-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1,d_2 chéo nhau và các điểm A_1,B_1,C_1 trên d_1, các điểm A_2,B_2,C_2 trên d_2 sao cho $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=\dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Lúc đó các đường thẳng A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

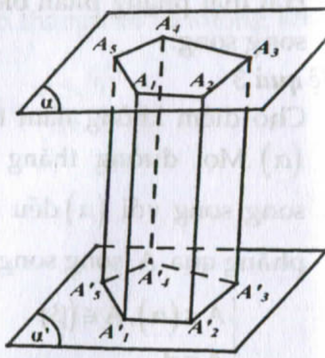
4. Hình lăng trụ và hình chóp cụt.

4.1. Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α').

Trên (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1,A_2,...,A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt (α') lần lượt tại $A'_1,A'_2,...,A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2,A_2A'_2A'_3A_3,...,A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

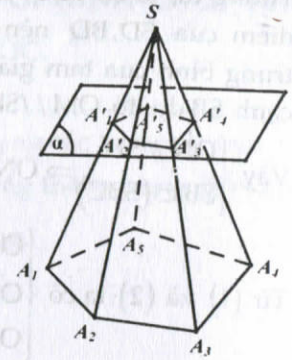


Lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

4.2. Hình chóp cụt.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Một mặt phẳng không đi qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh bên $SA_1,SA_2,..,SA_n$ lần lượt tại $A'_1,A'_2,..A'_n$. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1,A'_2A'_3A_3A_2,...,A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

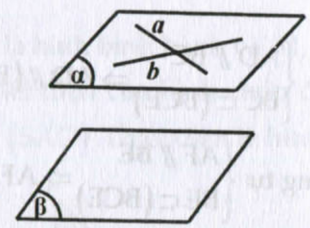
Bài toán 01: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng song song ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

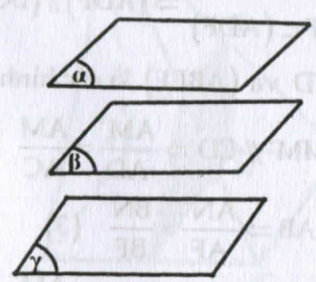
- Chứng minh trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

$\begin{cases}a\subset(\alpha),b\subset(\alpha)\\a\cap b=I\\a//(\beta)\\b//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$.



- Chứng minh hai mặt phẳng đó cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

$\begin{cases}(\alpha)//(\gamma)\\(\beta)//(\gamma)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$.



CÁC VÍ DỤ

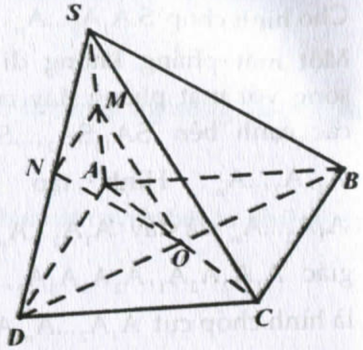
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Lời giải

Ta có M,O lần lượt là trung điểm của SA,AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM//SC$.

Vậy $\begin{cases}OM//SC\\SC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow OM//(SBC)\ (1)$.

Tương tự, ta có N, O lần lượt là trung điểm của SD, BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $OM // SB$.



Vậy $\begin{cases} ON // SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ON // (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} OM // (SBC) \\ ON // (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases}$

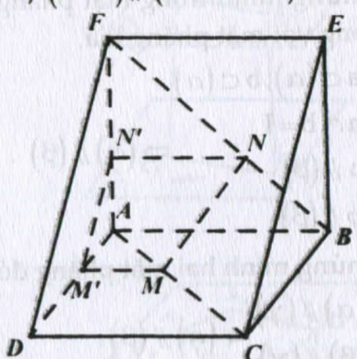
$\Rightarrow (OMN) // (SBC)$.

Ví dụ 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) // (BCE)$.

b) $(DEF) // (MM'N'N)$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} AD // BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD // (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF // BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF // (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) // (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' // CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

$NN' // AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' // DF \Rightarrow DF // (MM'N'N)$.

Lại có $NN' // AB \Rightarrow NN' // EF \Rightarrow EF // (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF // (MM'N'N) \\ EF // (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) // (MM'N'N)$.

Bài toán 02: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA (α) VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT (α) VỚI MỘT MẶT PHẲNG (β) CHO TRƯỚC.

Phương pháp:

Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau:

- Khi $(\alpha) // (\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng.

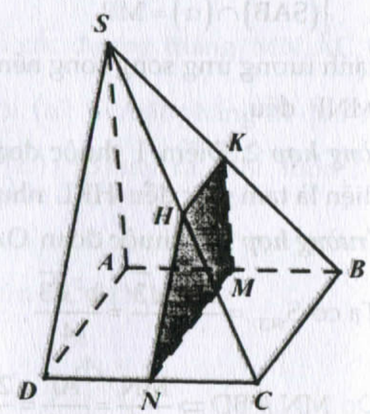
Sử dụng $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\beta) \cap (\gamma) = d \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = d' // d, M \in d'$.

- Tìm đường thẳng d mằn trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d, khi đó $(\alpha) // d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Thiết diện là hình gì?

Lời giải



Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK // SA, K \in SB$

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH // SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD), (SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN // BC \Rightarrow MN // HK$.

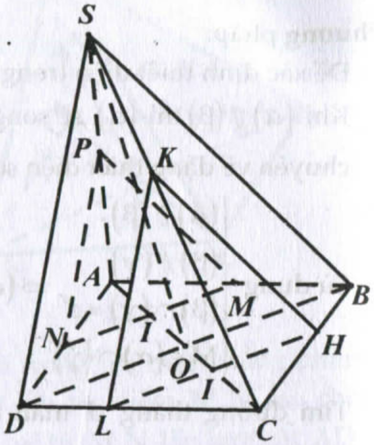
Vậy thiết diện là một hình thang.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di

động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI = x \ (0 < x < a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.



Lời giải

a) ***Trường hợp 1.*** Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN // BD, I \in MN$.

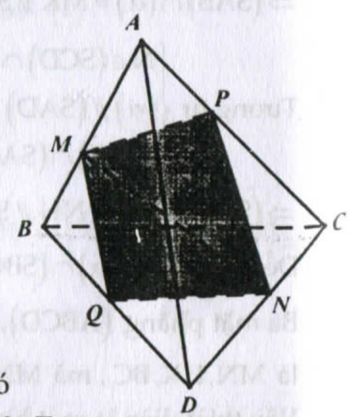
Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP // SD, P \in SN$.

Thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases} \Rightarrow MP // SB$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như hình vẽ.

b) ***Trường hợp 1.*** I thuộc đoạn OA



Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN // BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a}$

$\Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$S_{MNP} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2 S_{BCD} = [\dfrac{2(a-x)}{a}]^2 \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Vậy $S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OA) \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OC) \end{cases}$

Bài toán 03: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ THALES.

Phương pháp:

Định lí Thales thường được ứng dụng nhiều trong các bài toán tỉ số hay các bài toán chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng cố định.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND} > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

c) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

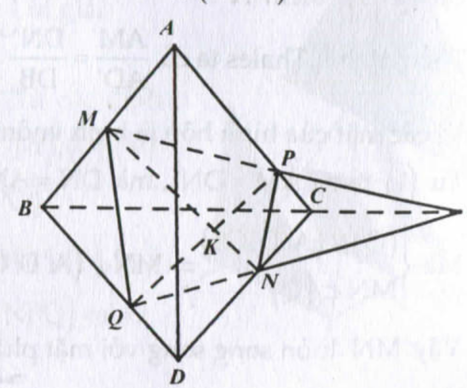
Lời giải

a) Do $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN, AC, BD cùng song song với một mặt phẳng (β). Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha) // (\beta)$ suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

b) Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} = k$, lúc này $MP // BC$ nên $BC // (MNP)$.

Ta có : $\begin{cases} N \in (MNP) \cap (BCD) \\ BC // (MNP) \\ BC \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (BCD) \cap (MNP) = NQ // BC, Q \in BD$.



Thiết diện là tứ giác MPNQ.

Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} \neq k$

Trong (ABC) gọi $R = BC \cap MP$

Trong (BCD) gọi $Q = NR \cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K = MN \cap PQ$

Ta có $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}} = \dfrac{PK}{PQ}$.

Do $\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

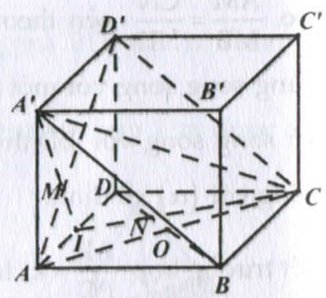
$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k \Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{PK+KQ} = \frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ}+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \,//\, A'C$.

Lời giải



a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$ (1)

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases} (Q) \,//\, (A'D'CB) \\ MN \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có

$DN = x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \dfrac{2}{3}DO$

$\Rightarrow N$ là trọng tâm của tam giác ACD.

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{IM}{IA'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{IM}{IA'} \Rightarrow MN \,//\, A'C$.

Bài toán 04: CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG THẲNG CÙNG NẰM TRONG MỘT MẶT PHẲNG HOẶC BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

- Để chứng minh các đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng ta chứng minh các đường thẳng đó cùng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng.
- Để chứng minh 4 điểm đồng phẳng ta chứng minh các điểm đó thuộc các đường thẳng mà các đường thẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng nào đó.
- Ngoài ra ta có thể sử dụng định lí **Menelaus** trong không gian để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.

Định lí Menelaus

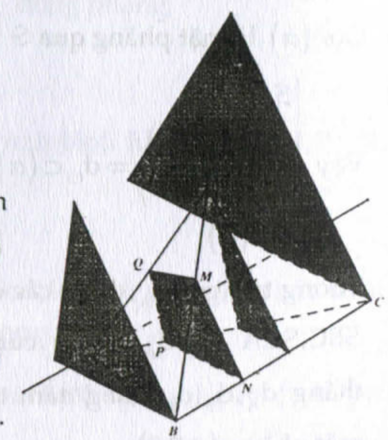
Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA của tứ diện $ABCD$ (M, N, P, Q khác với A, B, C, D) thì M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QD}{QA} = 1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh định lý Menelaus.

Lời giải

Phần thuận.



Giả sử M, N, P, Q đồng phẳng. Từ các đỉnh A, B, C dựng các mặt phẳng $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ theo thứ tự song song với $(MNPQ)$.

Từ D dựng đường thẳng d cắt $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ theo thứ tự tại A', B', C' và cắt $(MNPQ)$ tại O.

Ta có $\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$

Theo định lí Thales thì $\frac{OA'}{OB'}=\frac{MA}{MB}$

$\frac{OB'}{OC'}=\frac{NB}{NC},\frac{OC'}{OD}=\frac{PC}{PD},\frac{OD}{OA'}=\frac{QD}{QA}$;

$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$.

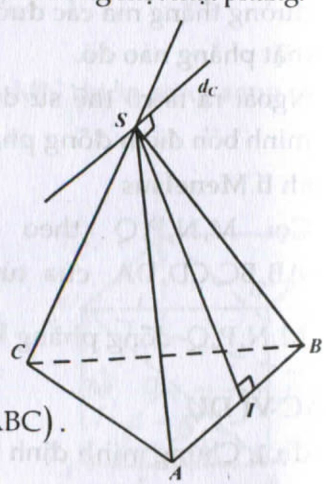
Phần đảo.

Giả sử $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$. Gọi $E=(MNP)\cap AD$ theo chứng minh trên, do M,N,P,E đồng phẳng nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{ED}{EA}=1\Rightarrow\frac{QD}{QA}=\frac{ED}{EA}\Rightarrow E\equiv Q$.

Vậy M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC$. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB, SAC, SBC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải



Gọi d_C là đường phân giác ngoài của góc S trong tam giác SAB và I là trung điểm của AB.

Do tam giác SAB cân tại S nên $SI\perp AB$ và SI là phân giác trong của góc S nên $SI\perp d_C$.

Vậy trong (SAB), ta có $\begin{cases}d_C\perp SI\\AB\perp SI\end{cases}$

$\Rightarrow d_C\,//\,AB\Rightarrow d_C\,//\,(ABC)$.

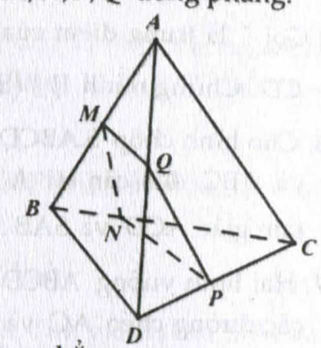
Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC).

Vậy $\begin{cases}S\in d_C\\d_C\,//\,(ABC)\\(\alpha)\,//\,(ABC)\\S\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow d_C\subset(\alpha)$.

Tương tự, gọi d_A,d_B là các đường phân giác ngoài góc S của các tam giác SBC, SCA thì d_A và d_B cũng nằm trong mặt phẳng (α) nên các đường thẳng d_A,d_B,d_C cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua S và song song với mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (M, N, P, Q khác với các đỉnh của tứ diện) sao cho $\frac{MA}{MB}=\frac{PD}{PC}$ và $\frac{NB}{NC}=\frac{QA}{QD}$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải



Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{PD}{PC}\Rightarrow\frac{MA}{MB}.\frac{PC}{PD}=1$ (1)

Tương tự $\frac{NB}{NC}=\frac{QA}{QD}\Rightarrow\frac{NB}{NC}.\frac{QD}{QA}=1$ (2)

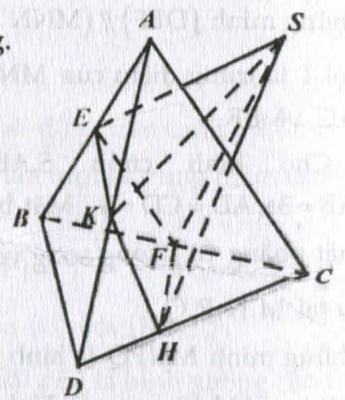
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$

Theo định lí Menelaus thì bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD và một điểm S trong không gian (S không trùng với A, B, C, D). Gọi E, F, H, K lần lượt là chân các đường phân giác trong góc S của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA.

Chứng minh bốn điểm E, F, H, K đồng phẳng.

Lời giải



Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{EA}{EB}=\frac{SA}{SA},\frac{KD}{KA}=\frac{SD}{SA}$

$\frac{HC}{HD}=\frac{SC}{SD},\frac{FB}{FC}=\frac{SB}{SC}$

Suy ra $\frac{EA}{EB}.\frac{FB}{FC}.\frac{HC}{HD}.\frac{KD}{KA}=\frac{SA}{SB}.\frac{SB}{SC}.\frac{SC}{SD}.\frac{SD}{SA}=1$

Theo định lí Menelaus thì bốn điểm E, F, H, K đồng phẳng.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

44. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN)\,//\,(DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

45. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN)//(SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ//(SAB)$.

46. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF//(SAD)$.

47. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD,AF tại M',N'.

a) Chứng minh $(BCE)//(ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF)//(MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M,N thay đổi trên AC và BF.

48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB=3a, AD=CD=a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA=2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD,BC,SC,SD theo thứ tự tại M,N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x=AM$ $(0<x<a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I=MQ\cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J=MP\cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

49. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC),(B'AC),(C'AB)$.

50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA')//(B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1,G_2 của các tam giác $BDA', B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

51. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M,N,P,Q sao cho $AM=C'N=C'P=AQ=x$ $(0\le x\le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng và MP,NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD,SC,SB tại N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I=NP\cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

53. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',BB',BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

54. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M,N nằm trên AD',BD sao cho $AM=DN=x\left(0<x<a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN//A'C$.

55. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK)//(BB'C'C)$ và $(A'KG)//(AIB')$.

b) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

56. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác AMNN' là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị trí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

57. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và MNPQ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x, AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM + AN$.

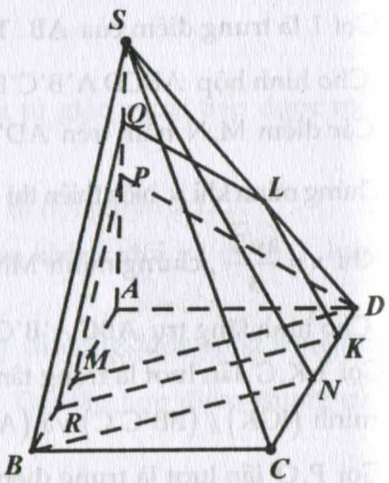
c) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và $s = x + y$.

58. Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác AMNP là hình gì?

b) So sánh AM và NP.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ



44. a) Ta có $\begin{cases} BN \parallel DM \\ DM \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BN \parallel (DPM)$ (1)

Tương tự $\begin{cases} BS \parallel MP \\ MP \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BS \parallel (DPM)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBN) \\ (\alpha) \parallel (SBN) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} Q \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = QR \parallel SB, R \in AB$.

Tương tự $(\alpha) \cap (ABCD) = RK \parallel BN, K \in CD$

$(\alpha) \cap (SCD) = KL \parallel SB, L \in SD$.

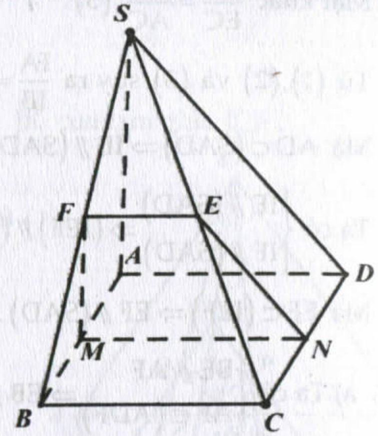
Vậy thiết diện là tứ giác QRKL.

c) Ta có $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\beta) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MF \parallel SA, F \in SB$

Tương tự $(\beta) \cap (SCD) = NE \parallel SD, E \in SC$.

Thiết diện là hình thang MNEF.



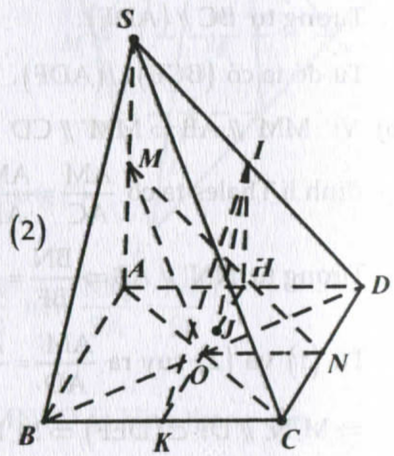
45. a) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SA nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh $SC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$ (1).

Tương tự $ON \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Do $J \subset (ABCD)$ và $d(J, AB) = d(J, CD)$ nên $J \in HK \Rightarrow IJ \subset (IHK)$.



Ta dễ dàng chứng minh được $(IHK) \parallel (SAB)$.

Vậy $\begin{cases} IJ \subset (IHK) \\ (IHK) \parallel (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.

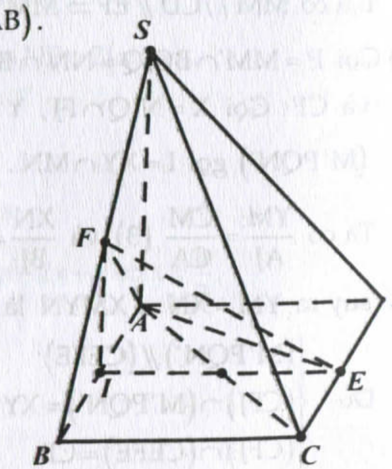
46. Kẻ $FI \parallel SA, I \in AB$

$\Rightarrow IF \parallel (SAD)$.

Ta có $\frac{FS}{FB} = \frac{IA}{IB}$ (1).

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{FS}{FB} = \frac{SA}{AB} = \frac{AD}{AC}$ (2)



(Do các tam giác ASD, ABC cân tại A nên $SA = AD, AB = AC$)

Mặt khác $\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{AD}{AC}$ (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{ED}{EC}\Rightarrow IE\,//\,AD$.

Mà $AD\subset(SAD)\Rightarrow IE\,//\,(SAD)$.

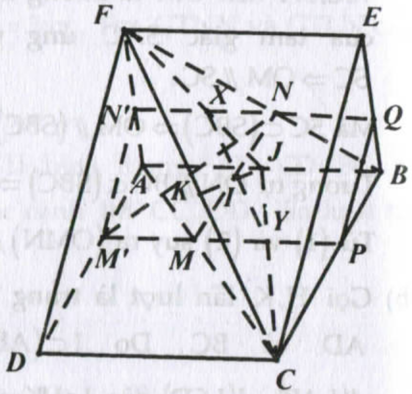
Ta có $\begin{cases} IE\,//\,(SAD)\\ IF\,//\,(SAD)\end{cases}\Rightarrow (IEF)\,//\,(SAD)$.

Mà $EF\subset(IEF)\Rightarrow EF\,//\,(SAD)$.

47. a) Ta có $\begin{cases} BE\,//\,AF\\ AF\subset(ADF)\end{cases}\Rightarrow EB\,//\,(ADF)$.

Tương tự $BC\,//\,(ADF)$.

Từ đó ta có $(BCE)\,//\,(ADF)$.



b) Vì $MM'\,//\,AB\Rightarrow MM'\,//\,CD$ nên theo định lí Thales ta có $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AM'}{AD}$ (1).

Tương tự $NN'\,//\,AB\Rightarrow\dfrac{BN}{BF}=\dfrac{AN'}{AF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM'}{AD}=\dfrac{AN'}{AF}$

$\Rightarrow M'N'\,//\,DF\subset(DEF)\Rightarrow M'N'\,//\,(DEF)$.

Lại có $MM'\,//\,CD\,//\,EF\Rightarrow MM'\,//\,(DEF)\Rightarrow(DEF)\,//\,(MNN'M')$.

c) Gọi $P=MM'\cap BC, Q=NN'\cap BE$ và J,K lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CF. Gọi $X=N'Q\cap FJ$, $Y=M'P\cap CJ$ thì $XY=(MPQN')\cap(FCJ)$. Trong $(M'PQN')$ gọi $I=XY\cap MN$.

Ta có $\dfrac{YM}{AJ}=\dfrac{CM}{CA}$ (3) và $\dfrac{XN}{BJ}=\dfrac{FN}{FB}$ (4) mà $AJ=BJ, AC=BF$ nên từ (3),(4) suy ra $YM=XN\Rightarrow XMYN$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MN.

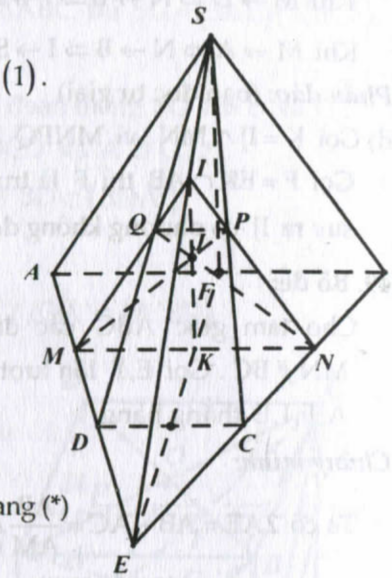
Do $\begin{cases}(M'PQN')\,//\,(CEFE)\\ (CFJ)\cap(M'PQN')=XY\\ (CFJ)\cap(CEFE)=CF\end{cases}\Rightarrow XY\,//\,CF$ mà $IX=IY$ nên I thuộc đường trung trung tuyến JK của tam giác JCF.

Giới hạn: Khi $N\to B\Rightarrow M\to A\Rightarrow I\to J$

Khi $N\to F\Rightarrow M\to C\Rightarrow I\to K$

Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp điểm I là đường trung tuyến JK của tam giác JCF.



48. a) Do $\begin{cases}(\alpha)\,//\,(SAB)\\ (ABCD)\cap(SAB)=AB\\ (ABCD)\cap(\alpha)=MN\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,AB$ (1).

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\,//\,(SAB)\\ (SCD)\cap(ABCD)=CD\\ (SCD)\cap(\alpha)=PQ\end{cases}$

$\Rightarrow PQ\,//\,CD$ (2).

Lại có $AB\,//\,CD$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có

$MN\,//\,AB\,//\,CD\,//\,PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang (*)

Dễ thấy rằng $MQ\,//\,SA, NP\,//\,SB$

do đó $\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA};\dfrac{NP}{SB}=\dfrac{CN}{CB}$ mà $\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{CN}{CB}$ nên $\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{NP}{SB}$.

Mặt khác ΔSAB cân tại $S\Rightarrow SA=SB$

$\Rightarrow MQ=NP$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

b) $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow MQ+NP=MN+PQ$

Ta có $\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{a-x}{a}\Rightarrow MQ=2(a-x)\Rightarrow NP=2(a-x)$

Lại có $\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{x}{a}\Rightarrow PQ=x$

Không khó khăn ta tính được $MN=3a-2x$

Do đó $MQ+NP=MN+PQ\Leftrightarrow 4(a-x)=3a-2x+x\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{3}$.

Khi đó tính được $r=\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

c) Gọi $E=AD\cap BC\Rightarrow SE=(SAD)\cap(SBC)$.

$I=MP\cap NQ\Rightarrow\begin{cases}I\in MP\subset(SAD)\\ I\in NQ\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow I\in SE$.

Giới hạn:

Gọi I_0 là giao điểm của SE với mặt phẳng (β) đi qua CD và song song với (SAB).

Khi $M \to D \Rightarrow N \to B \Rightarrow I \to I_0$

Khi $M \to A \Rightarrow N \to B \Rightarrow I \to S$

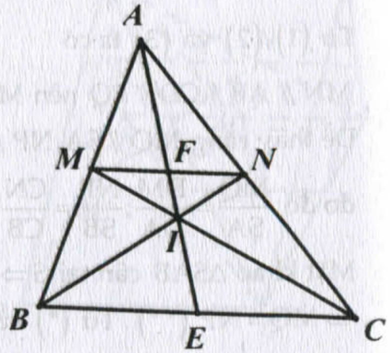
Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

d) Gọi $K = IJ \cap MN$, vì MNPQ là hình thang cân nên K là trung điểm của MN.

Gọi $F = EK \cap AB$ thì F là trung điểm của AB nên F cố định dễ thấy $IJ \,//\, SF$ suy ra IJ có phương không đổi và điểm J thuộc mặt phẳng cố định (SEF).

49. Bổ đề:

Cho tam giác ABC các điểm M, N thuộc các cạnh AB, AC sao cho $MN \,//\, BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN và $I = MB \cap CN$ thì A, F, I, E thẳng hàng.



Chứng minh:

Ta có $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dfrac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \dfrac{AC}{AN}\overrightarrow{AN}$

$= k\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = 2k\overrightarrow{AF}$.

Với $k = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$.

Hay A, E, F thẳng hàng.

Mặt khác $2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = -\dfrac{IB}{IN}\overrightarrow{IN} - \dfrac{IC}{IM}\overrightarrow{IM}$

$= l\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}\right) = 2l\overrightarrow{IF}$ với $l = -\dfrac{IB}{IN} = -\dfrac{IC}{IM} \Rightarrow$ I, E, F thẳng hàng.

Vậy A, F, I, E thẳng hàng.

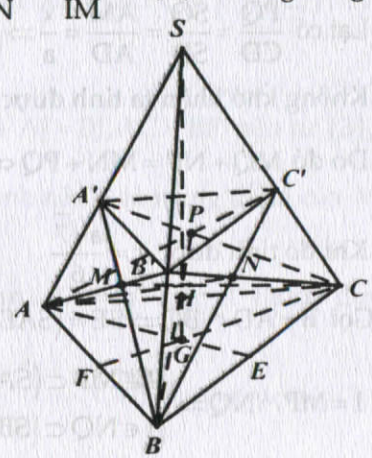
Quay lại bài toán:

Gọi $M = AB' \cap BA', P = AC' \cap CA'$,

$N = BC' \cap CB'$ và $I = CM \cap AN$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (ABC') \\ I \in CM \subset (BCA') \end{cases}$.

$\Rightarrow I \in BP = (ABC') \cap (BCA')$



Vậy I chính là điểm đồng quy của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BA.

Theo bổ đề trên ta có S, N, E thẳng hàng và $I \in AN$ nên $I \in (SAE)$.

Tương tự $I \in (SCF)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $SG = (SAE) \cap (SCF)$ nên $I \in SG$.

Từ đó dễ dàng lập luận được quỹ tích điểm I là đoạn thẳng SG trừ S và G.

50. a) Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm các mặt ABCD và A'B'C'D'.

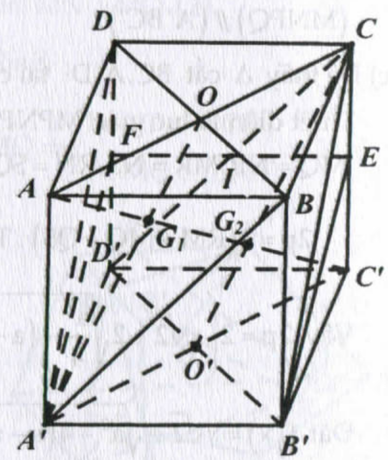
Dễ thấy DBB'D' là hình bình hành nên $B'D' \,//\, BD \subset (BDA')$

$\Rightarrow B'D' \,//\, (BDA')$ (1).

Tương tự OCO'A' là hình bình hành nên $O'C \,//\, OA' \subset (A'BD)$

$\Rightarrow CO' \,//\, (A'BD)$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $(A'BD) \,//\, (CB'D')$.



b) Ta có A'O là trung tuyến của tam giác A'BD và $\dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{OA}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác A'BD.

Tương tự G_2 cũng là trọng tâm của tam giác CB'D'. Dễ thấy OG_1 và $O'G_2$ là đường trung bình của các tam giác ACG_2 và $A'C'G_1$ nên $AG_1 = G_1G_2 = G_1C' = \dfrac{1}{3}AC'$.

c) Gọi I là trung điểm của CD'. Do G_2 là trọng tâm tam giác CB'D' nên $I \in B'G_2 \subset (A'B'G_2)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (A'B'G_2) \cap (CDD'C') \\ A'B' \,//\, C'D' \\ A'B' \subset (A'B'G_2) \\ C'D' \subset (CDD'C') \end{cases} \Rightarrow (A'B'G_2) \cap (CDD'C') = EF \,//\, C'D'$

$E \in CC', F \in DD'$. Thiết diện là hình bình hành A'B'EF

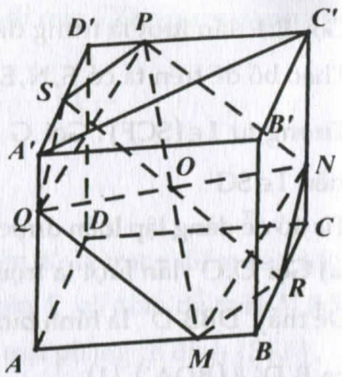
51. a) Dễ thấy $PN \,//\, CD'$ và $QM \,//\, A'B$ mà $A'B \,//\, C'D$ nên $PN \,//\, QM$ hay M, N, P, Q đồng phẳng.

b) Do PC'MA là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.

$\Rightarrow O \in (MNPQ)$.

Mặt khác $A'B \,//\, MQ \subset (MNPQ)$

$\Rightarrow A'B \,//\, (MNPQ)$.



Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$(MNPQ) \,//\, (A'BC') \Rightarrow BC' \,//\, (MNPQ)$

$\Rightarrow BC' \,//\, NR$

$\Leftrightarrow \dfrac{BR}{BC} = \dfrac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$. Đảo lại $x = \dfrac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ) \,//\, (A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là

$$2p = 2(RM + MQ + QS). \text{ Ta có } MR = QS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2},\ QM = x\sqrt{2}$$

Vậy $2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0;a]$.

Theo Cauchy -Schwarz

$$\sqrt{\left(a^2 + 4(a-x)^2\right)\left(1^2 + 1^2\right)} \ge a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$$

Nên $f(x) \ge x\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{a}{2}$

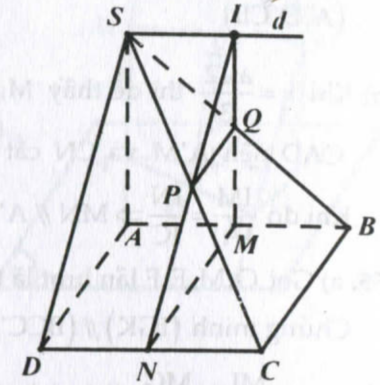
Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \le \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \le 0 \text{ đúng } \forall x \in [0;a].$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = a$. Vậy $\max(2p) = 2a\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

52. a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (SAB) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AB$. Tương tự



$(\alpha) \cap (SAB) = MQ \,//\, SA$.

$(\alpha) \cap (SCD) = NP \,//\, SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

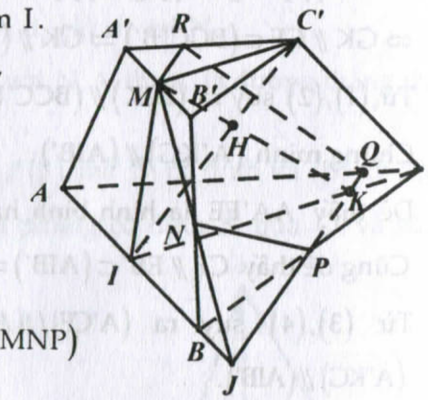
Do $\begin{cases} MN \,//\, BC \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, MN \ (1)$

Ta có $MN \,//\, AD, MQ \,//\, SA$ mà $AD \perp SA$ nên $MN \perp MQ$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$, khi đó $I = NP \cap MQ \Rightarrow \begin{cases} I \in NP \subset (SCD) \\ I \in MQ \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in d$ từ đây dễ dàng tìm được quĩ tích của điểm I.

53. a) Trong $(ABB'A')$ gọi $J = MN \cap AB$,



trong (ABC) gọi $Q = JP \cap AC$.

Ta có $(ABC) \,//\, (A'B'C')$ nên:

$(MNP) \cap (A'B'C') = MR \,//\, PQ$.

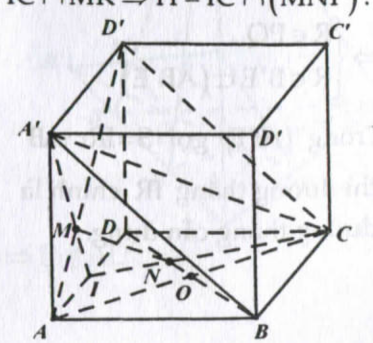
Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

b) Trong (ABC) gọi $K = PQ \cap IC$ thì $K \in (MNP)$

$\Rightarrow MK \subset (MNP)$.

Do $CI \,//\, C'M$ nên trong $(MICC')$ gọi $H = IC' \cap MK \Rightarrow H = IC' \cap (MNP)$.

54. a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(A'D'CB)$ và $N' = (\alpha) \cap BD$.



Ta có $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$ (1)

Ta có $AD' = BD = a\sqrt{2}$ nên

$AM = DN'$ mà $AM = DN$

$\Rightarrow DN = DN' \Rightarrow N \equiv N'$.

Vậy $MN \subset (\alpha) \,//\, (A'D'CB)$ do đó MN song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

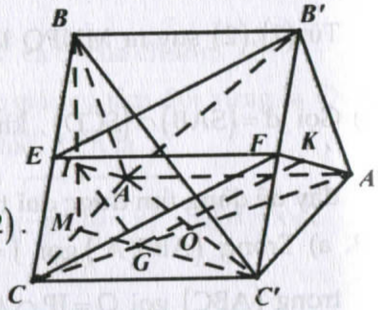
b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì dễ thấy M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'AD$ và CAD nên $A'M$ và CN cắt nhau tại trung điểm I của AD.

Khi đó $\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} \Rightarrow MN \,//\, A'C$.

55. a) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung điểm của $AC', AC, BC, B'C'$.

Chứng minh $(IGK) \,//\, (BCC'B')$.

Ta có $\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG \,//\, CC' \subset (BCC'B') \Rightarrow IG \,//\, (BCC'B')$ (1)



Tương tự $\frac{A'G}{A'C} = \frac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C} = \frac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \frac{2}{3}$.

Lại có $\frac{A'K}{A'F} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A'G}{A'C} = \frac{A'K}{A'F}$

$\Rightarrow GK \,//\, CF \subset (BCC'B') \Rightarrow GK \,//\, (BCC'B')$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $(IGK) \,//\, (BCC'B')$.

Chứng minh $(A'KG) \,//\, (AIB')$.

Dễ thấy $AA'FE$ là hình bình hành nên $A'F \,//\, AE$ hay $A'F \,//\, (AIB')$ (3).

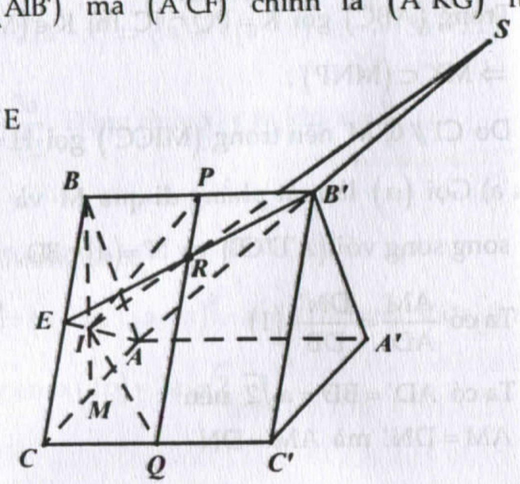
Cũng dễ thấy $CF \,//\, EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF \,//\, (AIB')$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $(A'CF)//(AIB')$ mà $(A'CF)$ chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG)//(AIB')$.

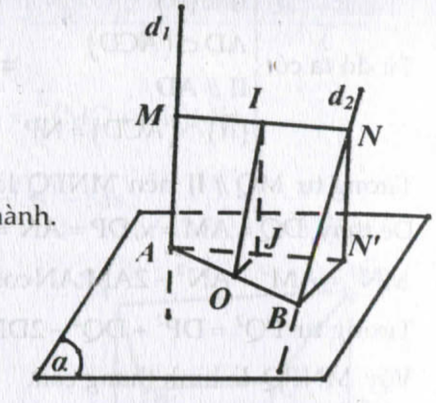
b) Trong $(BCC'B')$ gọi $R = PQ \cap B'E$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E) \end{cases}$

Trong $(AB'E)$ gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.



56. a) Ta có $MA \,//\, NN'$ (1)



Do $\begin{cases} MN \,//\, (\alpha) \\ (AMNN') \cap (\alpha) = AN' \end{cases}$

$\Rightarrow AN' \,//\, MN$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $AMNN'$ là hình bình hành.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 thì $NN' \subset (\beta) \Rightarrow N' \in (\beta)$ từ đó ta có N' thuộc giao tuyến d_3 của (α) và (β).

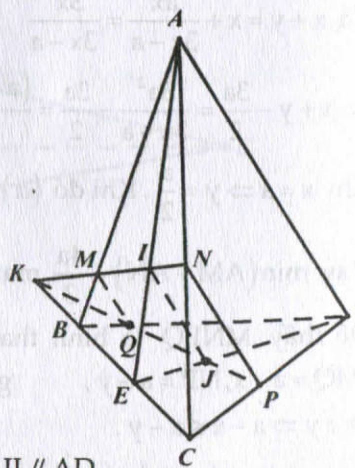
b) Ta có $MN = AN'$ nên MN nhỏ nhất khi AN' nhỏ nhất $\Leftrightarrow AN' \perp d_3$.

Từ đó ta xác định Δ như sau:

- Dựng (β) chứa d_2 và $(\beta) \,//\, d_1$.
- Dựng giao tuyến $d_3 = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Gọi N' là hình chiếu của A trên d_3.
- Từ N' dựng đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại N.
- Từ N dựng đường thẳng Δ song song với $N'A$ thì Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

c) Gọi J là trung điểm của AN' thì $(OIJ) \,//\, (\beta)$ mà O cố định và (β) cố định nên (OIJ) cố định. Vậy OI thuộc mặt phẳng cố định đi qua O và song song với (β).

57.a) Ta có $(ABC), (DBC), (\alpha)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là BC, MN, PQ nên theo định lí về giao tuyến thì BC, MN, PQ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



Ta chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân trong trường hợp BC, MN, PQ đồng quy

Gọi E là trung điểm của BC thì $\frac{EI}{EA} = \frac{EJ}{ED} \Rightarrow IJ \,//\, AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases} IJ \subset (\alpha) \\ AD \subset (ACD) \\ IJ \,//\, AD \\ (\alpha)\cap(ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, IJ$.

Tương tự $MQ \,//\, IJ$ nên MNPQ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = AM = x, DP = AN = y$. Theo định lí Cô–sin ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy$.

Tương tự $PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP.DQ\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow MN = PQ$

Vậy MNPQ là hình thang cân.

Trường hợp BC, MN, PQ song song không có gì khó khăn bạn đọc tự kiểm tra.

c) Ta có $S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\sin 60^0 = \frac{1}{2}x.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0$

$\Leftrightarrow a(x+y) = 3xy$.

b) Ta có $AM + AN = x + y$. Theo BĐT Cauchy ta có

$a(x+y) = 3xy \le 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 4a(x+y) \Leftrightarrow x + y \ge \frac{4a}{3}$

$\Rightarrow AM + AN \ge \frac{4a}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{2a}{3}$, khi đó (α) đi qua IJ và song song với BC.

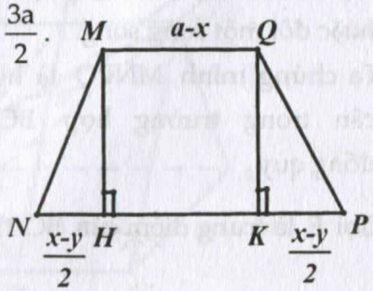
Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$ khi đó $x \in [\frac{2a}{3}; a]$

Và $x + y = x + \frac{ax}{3x-a} = \frac{3x^2}{3x-a}$

$\Rightarrow x + y - \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{3x-a} - \frac{3a}{2} = \frac{(a-x)(2a-x)}{3x-a} \le 0 \Rightarrow x + y \le \frac{3a}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a \Rightarrow y = \frac{a}{2}$. Khi đó (α) đi qua B.

Vậy $\min(AM+AN) = \frac{4a}{3}, \max(AM+AN) = \frac{3a}{2}$.

c) Dễ thấy MNPQ là hình thang cân có $MQ = a - x, NP = a - y$, giả sử $x \ge y \Rightarrow a - x \le a - y$.



Ta có $HN = \frac{(a-y)-(a-x)}{2} = \frac{x-y}{2}$

$MH^2 = MN^2 - NH^2 = x^2 + y^2 - xy - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{3(x^2+y^2) - 6xy}{4} = \frac{3s^2 - 8as}{4}$.

$MH = \sqrt{3xy} = \sqrt{a(x+y)} = \frac{\sqrt{3s^2 - 8as}}{2}$ $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MH$

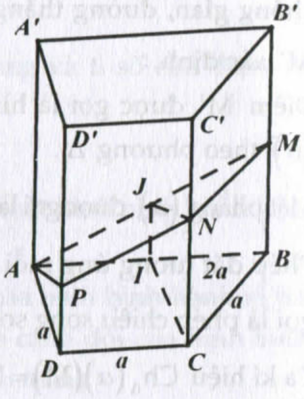
$= \frac{1}{2}(2a - (x+y))\sqrt{3s^2 - 8as} = \frac{1}{4}(2a - s)\sqrt{3s^2 - 8as}$.

58.a) Ta có $(ABB'A') \,//\, (CDD'C')$,

$(\alpha)\cap(ABB'A') = AM$

$(\alpha)\cap(CDD'C') = NP$

$\Rightarrow AM \,//\, NP$ (1) do đó AMNP là hình thang.



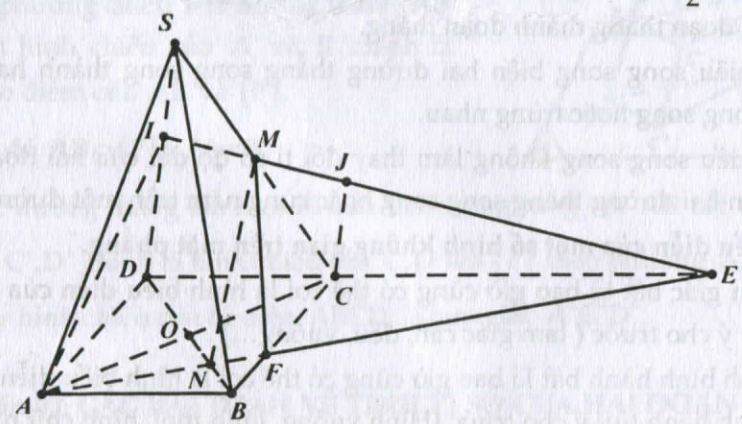
b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AM thì $IC \,//\, AD \Rightarrow IC \,//\, (ADD'A')$

lại có $IJ \,//\, BB' \,//\, AA'$

$\Rightarrow IJ \,//\, AA' \subset (ADD'A') \Rightarrow (CIJN) \,//\, (ADD'A')$

Mặt khác $(\alpha)\cap(ADD'A') = AP$ và $(\alpha)\cap(CIJN) = JN$ nên $JN \,//\, AP$ (2)

Từ (1),(2) suy ra APNJ là hình bình hành, do đó $PN = AJ = \frac{1}{2}AM$.



Phép chiếu song song – Hình biểu diễn của một hình trong không gian

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Phép chiếu song song.

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song với Δ cắt (α) tại điểm M' xác định.

Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương của Δ gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó trên (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Ta kí hiệu $Ch_{\Delta}(\alpha)(M) = M'$.

2. Tính chất của phép chiếu song song.

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.

- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tùy ý cho trước (tam giác cân, đều, vuông…) .
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (Hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, hình bình hành…)
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài của hai cạnh đáy được bảo toàn.
- Hình elip là hình biểu diễn của hình tròn.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: VẼ HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH (H) CHO TRƯỚC.

Phương pháp:

Để vẽ hình biểu diễn của hình (H) ta cần xác định các yếu tố bất biến có trong hình (H).

- Xác định các yếu tố song song.
- Xác định tỉ số điểm M chia đoạn AB.
- Trong hình (H') phải đảm bảo tính song song và tỉ số của điểm M chia đoạn AB.

CÁC VÍ DỤ

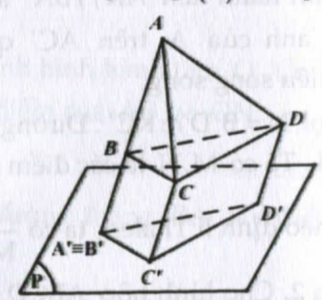
Ví dụ 1. Hình thang có thể là hình biểu diễn của một hình bình hành không

Lời giải

Hình thang không thể coi là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song còn cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song (tính song song không được bảo toàn).

Ví dụ 2. Vẽ hình biểu diễn của tứ diện $ABCD$ lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB(AB không song song với (P)).

Lời giải



Vì phương chiếu l là đường thẳng AB nên hình chiếu của A và B chính là giao điểm của AB và (P).

Do đó $AB \cap (P) = A' \equiv B'$

Các đường thẳng lần lượt đi qua C, D song song với AB cắt (P) tại C', D' thì C', D' chính là hình chiếu của C, D lên (P) theo phương AB.

Vậy hình chiếu của tứ diện $ABCD$ là tam giác $A'C'D'$.

Bài toán 02: CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH TỈ SỐ CỦA HAI ĐOẠN THẲNG VÀ CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.

Phương pháp:

Để tính tỉ số của điểm M chia đoạn AB(tính $\frac{MA}{MB}$) ta xét phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương l không song song với AB sao cho

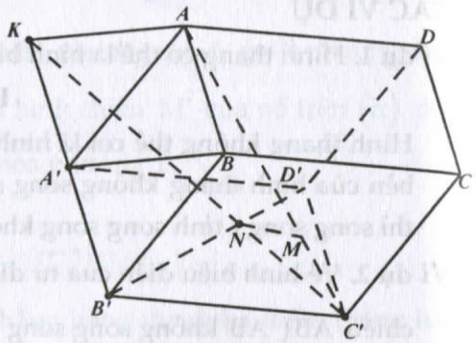
ảnh của M,A,B là ba điểm M',A',B' mà ta có thể tính được $\dfrac{M'A'}{M'B'}$, khi đó $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{M'A'}{M'B'}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M,N tương ứng trên các đoạn $AC',B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.

Lời giải

Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BA'. Ta có N là ảnh của M hay M chính là giao điểm của $B'D'$ và ảnh AC' qua phép chiếu này



Do đó ta xác định M,N như sau:

Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm K sao cho $A'K=B'A'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên $AK//BA'$ suy ra K là ảnh của A trên AC' qua phép chiếu song song.

Gọi $N=B'D'\cap KC'$. Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại M. Ta có M,N là các điểm cần xác định.

Theo định lí Thales, ta có $\dfrac{MA}{MC'}=\dfrac{NK}{NC'}=\dfrac{KB'}{C'D'}=2$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

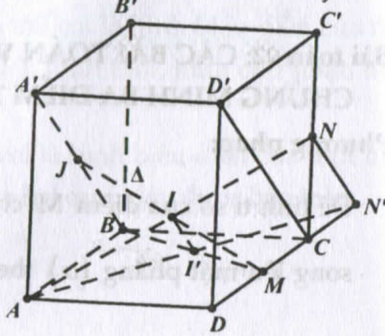
a) Xác định đường thẳng Δ đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$.

b) Gọi I,J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\dfrac{IM}{IJ}$.

Lời giải

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cắt cả AN và BA'. Gọi I,J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và BA'.

Xét phép chiếu song song lên $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'B$.



Khi đó ba điểm J,I,M lần lượt có hình chiếu là B,I',M. Do J,I,M thẳng hàng nên B,I',M cũng thẳng hàng. Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN. Vì $I\in AN\Rightarrow I'\in AN'\Rightarrow I'=BM\cap AN'$.

Từ phân tích trên suy ra cách dựng:

- Lấy $I'=AN'\cap BM$.
- Trong (ANN') dựng $II'//NN'$ (đã có $NN'//CD'$) cắt AN tại I.
- Vẽ đường thẳng MI, đó chính là đường thẳng cần dựng.

a) Ta có $MC=CN'$ suy ra $MN'=CD=AB$. Do đó I' là trung điểm của BM. Mặt khác $II'//JB$ nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ, suy ra $IM=IJ\Rightarrow\dfrac{IM}{IJ}=1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của SD với (AMN).

b) Tính $\dfrac{SI}{ID}$.

60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi N là trung điểm của SD còn I,J lần lượt là trung điểm của AB và ON. Chứng minh $IJ//(SBC)$.

61. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên đường thẳng BA lấy điểm M sao cho A nằm giữa B và M, $MA=\dfrac{1}{2}AB$.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi (α) qua M,B' và trung điểm E của AC.

b) Gọi $D=BC\cap(MB'E)$. Tính tỉ số $\dfrac{BD}{CD}$.

62. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,P lần lượt là trung điểm các cạnh AD,BC còn N là điểm trên cạnh AB sao cho $AN=\dfrac{1}{3}AB$.

a) Tìm giao điểm Q của DC với (MNP).

b) Tính tỉ số $\dfrac{DQ}{DC}$.

63. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm trên cạnh DB, (α) là mặt phẳng đi qua M song song với AD, BC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với (α).

b) Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi.

c) Xác định vị trí của (α) để diện tích thiết diện lớn nhất.

64. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A,B,C,D lần lượt là A',B',C',D'. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm các cặp cạnh đối của tứ diện.

a) Chứng minh AA',BB',CC',DD' đồng qui tại G (G *gọi là trọng tâm của tứ diện,* AA',BB',CC',DD' *được gọi là các đường trọng tuyến của tứ diện*).

b) Chứng minh bảy đoạn thẳng AA',BB',CC',DD',MN,PQ,RS đồng quy.

65. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác BCD và M là điểm thuộc miền trong tam giác BCD. Đường thẳng qua M và song song với AG cắt các mặt phẳng $(ABC),(ACD),(ABD)$ tại P,Q,R.

a) Chứng minh $MP+MQ+MR$ không đổi khi M di động trong tam giác BCD.

b) Xác định vị trí của điểm M để $MP.MQ.MR$ đạt giá trị lớn nhất.

66. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Trên các cạnh BC,CD lấy các điểm M,N sao cho $\frac{MC}{MB}=\frac{1}{2},\frac{CN}{CD}=\frac{2}{3}$. Trên trung tuyến AP của tam giác ABD lấy điểm I sao cho $\frac{PA}{PI}=\frac{4}{5}$. Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt tứ diện bởi (MNP).

67. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M,N trên các đoạn $AC',B'D'$ tương ứng sao cho $MN \parallel BA'$ và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn chứa AE cắt SB,SD lần lượt tại M,N. Xác định vị trí của M,N trên các cạnh SB,SD sao cho $\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}$ đạt giá trị lớn nhất.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

59.

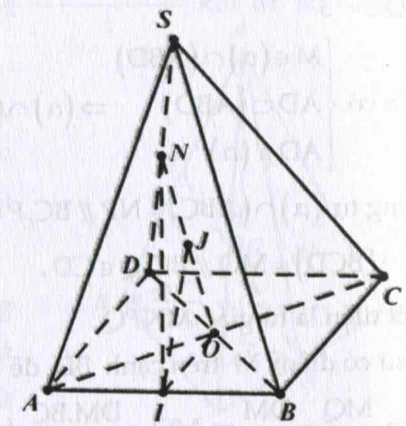
a) Gọi $E=AN\cap CD, F=AN\cap BC$ và $I=EM\cap SD$ thì $I=SD\cap(AMN)$.

b) Ta có $BF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{AD}=\frac{NB}{ND}=\frac{1}{3}$. Từ $\frac{BF}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{FC}{AD}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\frac{EC}{ED}=\frac{FC}{AD}=\frac{2}{3}$.

Kẻ $CJ // SD, J\in EI$. Ta có $\frac{MC}{MS}=\frac{CJ}{IS};\frac{ID}{CJ}=\frac{ED}{EC}\Rightarrow\frac{IS}{ID}=\frac{MS}{MC}.\frac{EC}{ED}=\frac{2}{3}$

Vậy $\frac{IS}{ID}=\frac{2}{3}$.



60. Ta có $ON \parallel SB\subset(SBC)$

$\Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (1).

Tương tự $ON // BC\subset(SBC)$

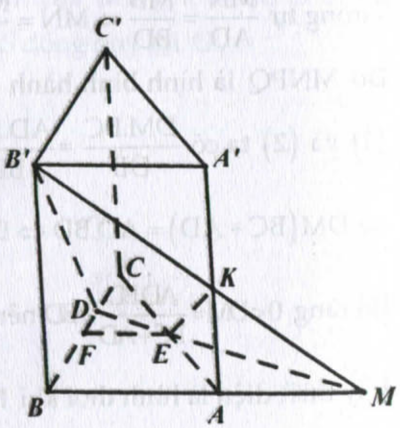
$\Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $(ONI) \parallel (SBC)$

mà $IJ\subset(ONI)\Rightarrow IJ \parallel (SBC)$.

61. a) Trong $(ABB'A')$ gọi $K=MB'\cap AA'$. Trong (ABC) gọi $D=ME\cap CB$.

Thiết diện là tứ giác $DEKB'$.



b) Kẻ $EF \parallel AB (F\in CB)$. Khi đó EF là đường trung bình của tam giác ABC và $EF=\frac{AB}{2}$. Xét tam giác DBM ta có $\frac{FD}{BD}=\frac{EF}{BM}=\frac{1}{3}\Rightarrow FD=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}FC$, tức D là trung điểm của FC do đó $\frac{BD}{CD}=3$.

62. a) Trong (ABC) gọi $E=AC\cap NP$, trong (ACD) gọi $Q=EM\cap CD$

$\Rightarrow\begin{cases}Q\in CD\\Q\in EM\subset(MNP)\end{cases}\Rightarrow Q=CD\cap(MNP)$.

b) Kẻ $AF \parallel CD, F\in AD$, kẻ $KP \parallel AN, K\in AC$.

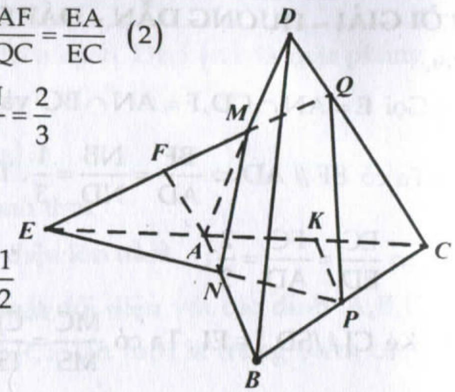
Ta có $\frac{AF}{DQ}=\frac{MA}{MD}=1 \Rightarrow AF=DQ$ (1), $\frac{AF}{QC}=\frac{EA}{EC}$ (2)

Do $KP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.3AN=\frac{3}{2}AN$ nên $\frac{AN}{KP}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{EA}{EK}=\frac{AN}{KP}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EA}{EC}=\frac{1}{2}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{QD}{QC}=\frac{FA}{QC}=\frac{EA}{EC}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{QD}{DC}=\frac{1}{3}$.

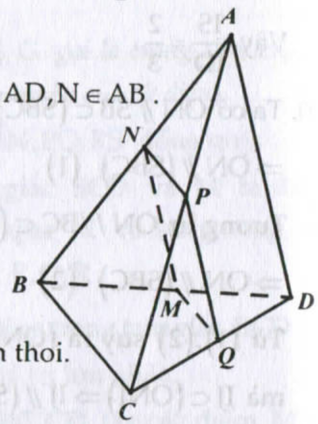


63. a) Ta có $\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(ABD) \\ AD\subset(ABD) \\ AD\,//\,(\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABD)=MN\,//\,AD, N\in AB$.

Tương tự $(\alpha)\cap(ABC)=NP\,//\,BC, P\in AC$.

$(\alpha)\cap(BCD)=MQ\,//\,BC, Q\in CD$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.



b) Giả sử có điểm M trên cạnh BD để MNPQ là hình thoi.

Ta có $\frac{MQ}{BC}=\frac{DM}{DB} \Rightarrow MQ=\frac{DM.BC}{DB}$ (1)

Tương tự $\frac{MN}{AD}=\frac{MB}{BD} \Rightarrow MN=\frac{MB.AD}{BD}$ (2)

Do MNPQ là hình bình hành nên nó là hình thoi khi $MN=MQ$, do đó từ (1) và (2) ta có $\frac{DM.BC}{DB}=\frac{AD.MB}{BD} \Rightarrow DM.BC=DA(DB-DM)$

$\Leftrightarrow DM(BC+AD)=AD.BD \Leftrightarrow DM=\frac{AD.BD}{BC+AD}$.

Rõ ràng $0<DM=\frac{AD.BD}{BC+AD}<BD$ nên điều kiện M nằm trên BD được thỏa mãn.

Vậy thiết diện là hình thoi khi M nằm trên cạnh BD sao cho $DM=\frac{AD.BD}{BC+AD}$.

c) Ta có $\frac{MQ}{BC}=\frac{MD}{DB}, \frac{MN}{DA}=\frac{MB}{DB} \Rightarrow \frac{MQ}{BC}+\frac{MN}{AD}=\frac{MD+MB}{DB}=1$

Vì $MQ\,//\,BC, MN\,//\,AD$ mà BC, AD không đổi nên góc giữa MN và MQ không đổi, do đó $S_{MNPQ}=MN.MQ\sin\phi$ (trong đó ϕ là góc giữa MN và MQ). Ta thấy $\sin\phi$ không đổi và:

$S_{MNPQ}=MN.MQ\sin\phi=(AD.BC\sin\phi).\frac{MN}{AD}.\frac{MQ}{BC}$

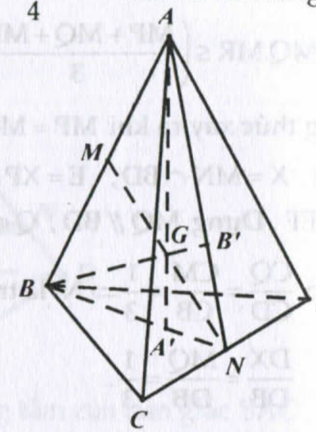
$\leq AD.BC\sin\phi\left(\frac{\frac{MN}{AD}+\frac{MQ}{BC}}{2}\right)^2=\frac{AD.BC\sin\phi}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MN}{AD}=\frac{MQ}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Vậy thiết diện thiết diện lớn nhất bằng $\frac{AD.BC\sin\phi}{4}$ khi M là trung điểm của BD.

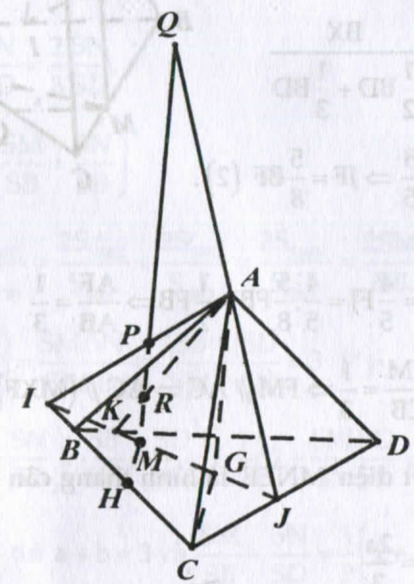
64. a) Gọi N là trung điểm của cạnh CD, thì ta dễ thấy $A'\in BN$ và $B'\in AN$ do đó trong (ABN), AA' và BB' cắt nhau tại điểm G.

Tương tự chứng minh được các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đôi một cắt nhau, mà bốn đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đồng quy.



b) Dễ dàng chứng minh được G là trung điểm của MN và từ đó ta có bảy đường thẳng AA', BB', CC', DD', MN, PQ, RS đồng quy tại G.

65.



a) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của MG với BC, CD, BD, kẻ MH // GC, $H \in BC$ thì ta có:

Ta có $\frac{MP}{AG} = \frac{IG}{IJ} = \frac{IH}{GC} = \frac{S_{MBC}}{S_{GBC}} = \frac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$

Tương tự $\frac{MQ}{AG} = \frac{3S_{MCD}}{S_{BCD}}, \frac{MR}{AG} = \frac{3S_{MBD}}{S_{BCD}}$

Từ đó ta có $MP + MQ + MR = 3AG$.

b) Theo BĐT Cauchy ta có

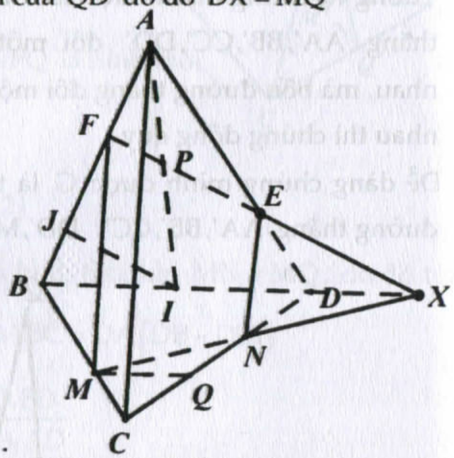
$$MP.MQ.MR \le \left(\frac{MP+MQ+MR}{3}\right)^3 = AG^3$$

Đẳng thức xảy ra khi $MP = MQ = MR = AG \Leftrightarrow M \equiv G$

66. Gọi $X = MN \cap BD$, $E = XP \cap AD$, $F = XP \cap AB$. Thiết diện là tứ giác MNEF. Dựng MQ // BD, $Q \in CD$.

Ta có $\frac{CQ}{CD} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ N là trung điểm của QD do đó $DX = MQ$

$\frac{DX}{DB} = \frac{MQ}{DB} = \frac{1}{3}$.



Dựng IJ // XF, $J \in AB$.

Ta có $\frac{AF}{FJ} = \frac{AP}{AI} = \frac{4}{5} \Rightarrow AF = \frac{4}{5}FJ$ (1)

$$\frac{BF}{JF} = \frac{BX}{IX} = \frac{BX}{ID+DX} = \frac{BX}{\frac{1}{2}BD + \frac{1}{3}BD}$$

$$= \frac{6BX}{5BD} = \frac{6}{5}.\frac{BX}{\frac{3}{4}BX} = \frac{8}{5} \Rightarrow JF = \frac{5}{8}BF \ (2).$$

Từ (1),(2) suy ra $AF = \frac{4}{5}FJ = \frac{4}{5}.\frac{5}{8}FB = \frac{1}{2}FB \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$

Do $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow FM // AC \Rightarrow AC // (MXF)$.

$\Rightarrow MF // NE$. Vậy thiết diện MNEF là hình thang cân có $MF = \frac{2a}{3}, NF = \frac{a}{3}$;

ΔAFE có $AF = \frac{a}{3}, AE = \frac{2a}{3}$.

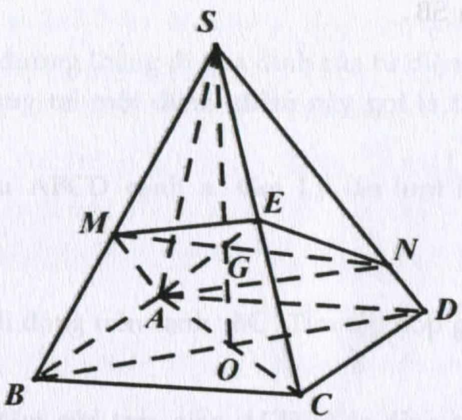
$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE.AF\cos 60^0 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow EF = \frac{a}{3}$.

Đường cao của hình thang là $h = \sqrt{EF^2 - \left(\frac{FM-EN}{2}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Diện tích thiết diện $S = \frac{1}{2}h(MF+NE) = \frac{11a^2}{24\sqrt{3}}$.

67. $\frac{MA}{MC'} = 2$.

68.



Gọi $O = AC \cap BD, G = AE \cap SO$, thì G là trọng tâm của tam giác SAC

Dễ thấy $G \in MN$.

Ta có $\frac{S_{\Delta SGM}}{S_{\Delta SOB}} = \frac{SG.SM}{SO.SB} = \frac{2}{3}\frac{SM}{SB}$

$\frac{S_{\Delta SGN}}{S_{\Delta SOD}} = \frac{SG.SN}{SO.SD} = \frac{2}{3}\frac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{S_{SMG}}{S_{SOB}} + \frac{S_{SNG}}{S_{SOD}} = \frac{2}{3}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SB}\right)$$

Mặt khác $\frac{S_{SMG}}{S_{SOB}} + \frac{S_{SNG}}{S_{SOD}} = \frac{2S_{SMG}}{S_{SBB}} + \frac{2S_{SNG}}{S_{SBD}} = \frac{2S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{2SM.SN}{SB.SD}$

Suy ra $\frac{1}{3}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) = \frac{SM.SN}{SB.SD} \Leftrightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ (*)

$$\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}\right)\left(\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{SM.SD}{SN.SB} + \frac{SN.SB}{SM.SD}\right)$$

Đặt $a = \frac{SB}{SM}, b = \frac{SD}{SN}$ thì $a + b = 3$ và $\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

Do $a \ge 1, b \ge 1$ và $a + b = 3$ nên ta có $a \in [1;2]$, từ đó .

Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{3-a} + \frac{3-a}{a} = \frac{9-6a+2a^2}{a(3-a)} \le \frac{5}{2}, \forall a \in [1;2]$

$\Rightarrow \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \le \frac{1}{3}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Vậy $\max\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) = \frac{3}{2}$ khi $M \equiv B$, N là trung điểm của SD hoặc $N \equiv D$, M là trung điểm của SB .

ÔN TẬP & KIỂM TRA

69. Cho tứ diện ABCD . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD , ACD .

a) Chứng minh AG_1 và BG_2 cắt nhau. Gọi giao điểm này là I . Tính $\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}}, \frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}}$.

b) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng nối các trung điểm của AB và CD .

c) Chứng minh các đường thẳng đi qua đỉnh của tứ diện và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm, điểm này gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD .

70. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

a) Tính IJ .

b) M là một điểm di động trên cạnh BC . Tìm tập hợp giao điểm N của AM và (ICD) .

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD . Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với (IGM) khi M là trung điểm của cạnh BC . Tính các tỉ số mà (IGM) chia các cạnh CD và AD . Thiết diện là hình gì ?. Tính diện tích của thiết diện đó.

71. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang ABCD với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Gọi I là trung điểm của SC . Mặt phẳng α quay quanh AI cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng IM cắt đường thẳng BC tại P , đường thẳng IN cắt đường thẳng CD tại Q . Chứng minh đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

c) Tìm tập hợp giao điểm J của IM và AN .

72. Cho hình chóp S.ABC . Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 di động sao cho $SA_1 = \frac{1}{n}SA$; $SB_1 = \frac{1}{2n+1}SB$, $SC_1 = \frac{1}{3n+2}SC$ (n là số nguyên dương). Chứng minh rằng mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ luôn chứa một đường thẳng cố định .

73. Trong mặt phẳng (P) cho góc $\widehat{xOy}$. A là một điểm không thuộc (P) và M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

a) Giả sử luôn có $OM = ON$. Chứng minh trung tuyến AI của tam giác AMN luôn chứa trong một mặt phẳng cố định.

b) Gọi (d) là đường thẳng cố định qua A, (d) cắt (P) tại một điểm không thuộc Ox, Oy và cắt đường thẳng MN.

i) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

ii) Gọi B là điểm cố định trên (d), B khác A và B không thuộc (P), AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh Q thuộc hai mặt phẳng cố định. Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

74. Cho tứ diện SABC. Qua C dựng mặt phẳng α cắt AB, SB tại B_1, B', qua B dựng mặt phẳng β cắt AC, SC tại C_1, C'. Hai đường thẳng CB', BC' cắt nhau tại O'; hai đường thẳng CB_1, BC_1 cắt nhau tại O_1. Giả sử đường thẳng $O'O_1$ cắt đường thẳng SA tại I.

a) Chứng minh ba đường thẳng AO_1, SO', BC đồng quy.

b) Chứng minh I, B_1, B' thẳng hàng và I, C_1, C' thẳng hàng.

75. Cho hình chóp S.ABCD, AD cắt BC tại E. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC. Mặt phẳng (ABM) cắt cạnh SD tại N. Gọi I là giao điểm của AM và BN, J là giao điểm của AN và BM.

a) Tìm tập hợp các điểm I. b) Tìm tập hợp các điểm J.

76. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là hai điểm cố định trên các cạnh AB, AC và IJ không song song với BC. Mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt các cạnh CD, BD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

c) Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

77. Trong mặt phẳng α cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, gọi A, B là hai điểm cố định ở ngoài mặt phẳng α và AB không song song với α. Một mặt phẳng β quay quanh AB cắt d tại M và d' tại N. Chứng minh rằng

a) Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giao điểm I của AM và BN ở trên một đường thẳng cố định.

c) Giao điểm J của AN và BM ở trên một đường thẳng cố định.

d) Đường thẳng IJ đi qua một điểm cố định.

78. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, có các cạnh đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Gọi I là trung điểm của cạnh SA, J là một điểm trên cạnh SC với $JS > JC$.

a) (α) là mặt phẳng quay quanh IJ cắt cạnh SD tại M và cạnh SB tại N. M, N di động trên phần nào của các cạnh SD và SB ?. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

b) (β) là mặt phẳng quay quanh IJ và cắt cạnh AD tại P. Tìm giao điểm Q của (β) và cạnh CD và tập hợp các giao điểm của IQ và JP.

Hướng dẫn giải

69.

a) Chứng minh AG_1, BG_2 cắt nhau. Tính $\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}}, \frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}}$.

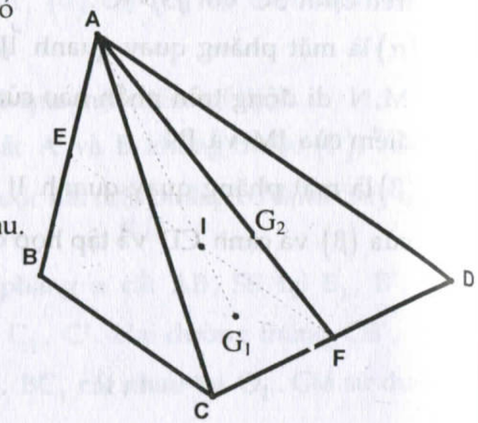
Gọi F là trung điểm của CD, ta có AG_1 và BG_2 cùng đi qua F.

$\frac{FG_2}{FG_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, AB$

$\Rightarrow ABG_1G_2$ là hình thang

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AG_1 và BG_2 cắt nhau.

* $\frac{\overline{IA}}{\overline{IG_1}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IG_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{G_1G_2}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FG_2}} = -3$.



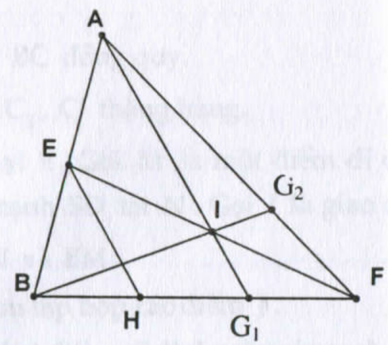
b) Chứng minh I là trung điểm của EF.

Gọi H là trung điểm của BG_1, vì $FG_1 = \frac{1}{3}FB$ suy ra G_1 là trung điểm của FH.

Ta có EH là đường trung bình của tam giác ABG_1

$\Rightarrow EH \,//\, IG_1$.

Mặt khác G_1 là trung điểm của FH nên I là trung điểm của EF.



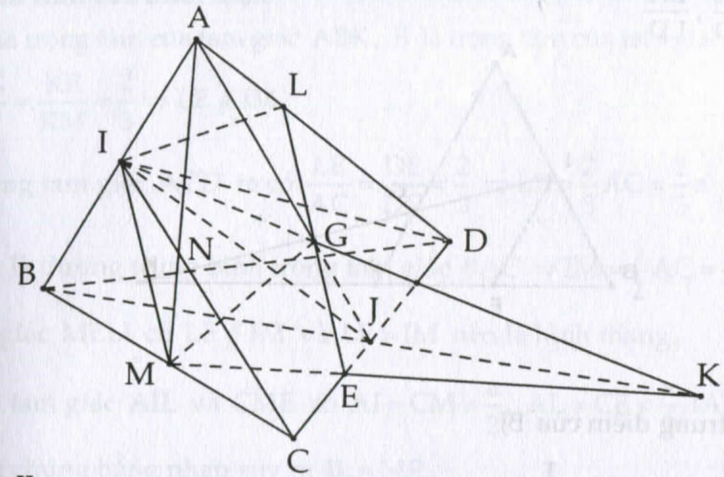
c) Chứng minh các đường thẳng đi qua đỉnh của tứ diện và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm.

Gọi G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh tương tự như câu a) ta có

* DG_3 cắt AG_1 tại điểm I_1 thỏa $\frac{\overline{I_1A}}{\overline{I_1G}} = -3$.

* CG_4 cắt AG_1 tại điểm I_2 thỏa $\frac{\overline{I_2A}}{\overline{I_2G}} = -3$.

Vậy $I_1 \equiv I_2 \equiv I$ suy ra đpcm.



70.

a) Tính IJ.

CI là đường cao của tam giác đều ABC, suy ra $CI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tương tự $DI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ tam giác ICD cân tại $I \Rightarrow IJ \perp CD$.

Trong tam giác vuông IJC ta có

$$IJ^2 = IC^2 - JC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b) Tập hợp các điểm N.

Phần thuận. N thuộc đường thẳng cố định IC.

Giới hạn. Khi $M \equiv C$ thì $N \equiv C$.

Khi $M \equiv B$ thì $N \equiv I$.

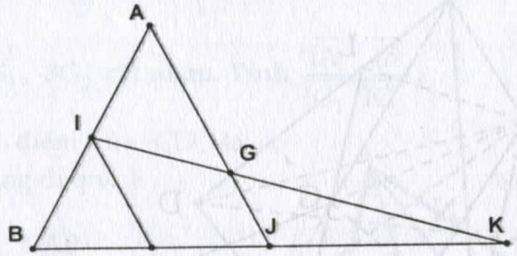
Khi M di động trên cạnh BC thì N di động trên đoạn IC.

Suy ra tập hợp N là đoạn IC.

c)* Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với mp(IGM).

Trong mặt phẳng (SBJ) đường thẳng IG cắt đường thẳng BJ tại K, KM cắt cạnh CD tại E, EG cắt cạnh AD tại L. Mặt phẳng (IGM) lần lượt cắt các mặt BCD, ACD, ADB, ABC theo các đoạn giao tuyến là ME, EL, LI, IM suy ra thiết diện của (IGM) với tứ diện ABCD là tứ giác MELI.

* Tính $\frac{EC}{ED}, \frac{LA}{LD}$

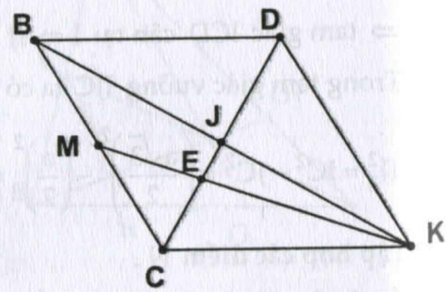


Gọi F là trung điểm của BJ

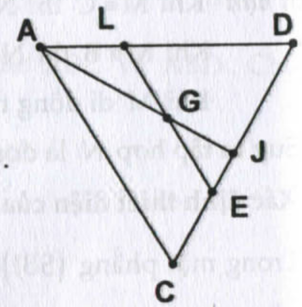
Ta có $IF \,//\, AJ$ và $IF = \frac{1}{2}AJ$,

mặt khác G là trọng tâm của tam giác ACD nên $JG = \frac{1}{3}AJ \Rightarrow JG = \frac{2}{3}IF$

$\Rightarrow \frac{KJ}{KF} = \frac{JG}{IF} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{KJ}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ J là trung điểm của BK.



Trong tam giác BCK, E là giao điểm của hai đường trung tuyến KM, CJ nên E là trọng tâm của tam giác BCK do đó $\frac{EC}{EJ} = 2$, lại có J là trung điểm của CD suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{1}{2}$.



Vì $\frac{EC}{EJ} = \frac{GA}{GJ} = 2 \Rightarrow GE \,//\, AC \Rightarrow \frac{LA}{LD} = \frac{EC}{ED} = \frac{1}{2}$.

* **Hình tính của thiết diện.**

G là trọng tâm của tam giác ABK, E là trọng tâm của tam giác BCK suy ra

$\frac{KG}{KI} = \frac{KE}{KM} = \frac{2}{3} \Rightarrow LE \,//\, IM$

Trong tam giác ACD ta có $\frac{LE}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow LE = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}a$

IM là đường trung bình trong tam giác BAC $\Rightarrow IM = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$.

Tứ giác MELI có $LE \,//\, IM$ và $LE > IM$ nên là hình thang.

Hai tam giác AIL và CME có $AI = CM = \frac{a}{2}$, $AL = CE = \frac{a}{3}$, $\widehat{IAL} = \widehat{MCE} = 60^0$

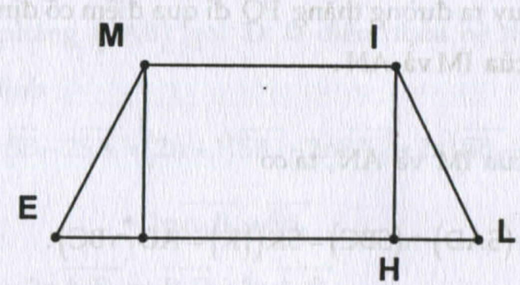
nên chúng bằng nhau suy ra $IL = ME$.

Vậy thiết diện MEIL là hình thang cân.

* **Diện tích của thiết diện.**

Áp dụng định lí hàm số Cosin trong tam giác AIL, ta có

$$IL^2 = AI^2 + AL^2 - 2AI.AL.\cos\widehat{IAL} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right).\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{36}.$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên EL.

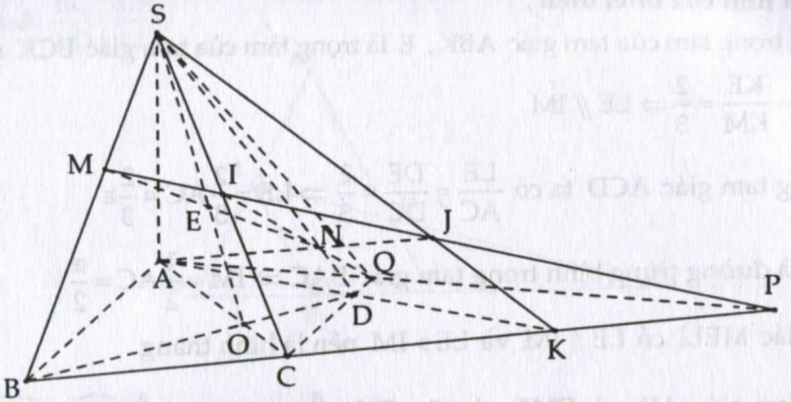
Xét tam giác vuông IHL ta có

$LH^2 = IL^2 - HL^2$ trong đó

$$HL = \frac{EL - MI}{2} = \frac{\frac{2a}{3} - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{12} = \frac{7a^2}{36} - \frac{a^2}{144} = \frac{27a^2}{144} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Diện tích thiết diện : $S = \frac{IM + EL}{2}.IH = \frac{\frac{a}{2} + \frac{2a}{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{48}$.

71.



a) Chứng minh MN đi qua điểm cố định.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của SO và AI (dựng trong mặt phẳng (SAC))

Ta có M,E,N là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt α và (SBD) nên chúng thẳng hàng suy ra đường thẳng MN đi qua điểm cố định E.

b) Chứng minh PQ đi qua điểm cố định.

A,P,Q là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt α và (ABCD) nên chúng thẳng hàng suy ra đường thẳng PQ đi qua điểm cố định A.

c) Tập hợp giao điểm của IM và AN.

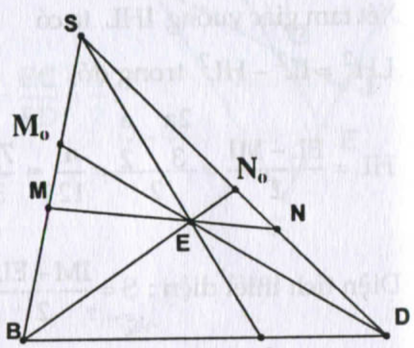
Phần thuận.

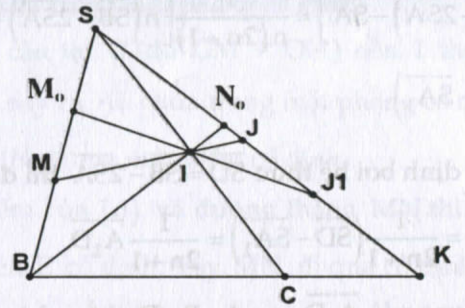
Gọi J là giao điểm của IM và AN, ta có

$$\begin{cases} IM \subset (SBC) \\ AN \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC) = SK\left(\{K\} = AD \cap BC\right).$$

Giới hạn.

N₀ là giao điểm của BE và SD, M₀ là giao điểm của DE và SB, vì MN luôn đi qua E nên để M thuộc cạnh SB và N thuộc cạnh SD thì M chỉ di động trên đoạn BM_o và N chỉ di động trên đoạn DN_o.





Ta có J là giao điểm của MI với SK.

Khi $M \equiv B$ thì $J \equiv J_o$ (J_o là giao điểm của BI với SK).

Khi $M \equiv Mo$ thì $J \equiv J_1$ (J_1 là giao điểm của IM_o với SK).

Khi M di động trên đoạn BM_o thì J di động trên $[J_1, J_o]$.

Vậy tập hợp các điểm J là đoạn $[J_1, J_o]$.

72. A_1 nằm trên cạnh SA và $SA_1 = \frac{1}{n}SA \Rightarrow \overrightarrow{SA} = n\overrightarrow{SA_1}$.

Tương tự $\overrightarrow{SB} = (2n+1)\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC} = (3n+2)\overrightarrow{SC_1}$.

Trước hết ta chứng minh đường thẳng A_1B_1 đi qua một điểm cố định.

Trong mặt phẳng (SAB) gọi D là điểm thỏa hệ thức $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} - 2\overrightarrow{SA}$ thì điểm D cố định.

Ta có: $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} - 2\overrightarrow{SA} = (2n+1)\overrightarrow{SB_1} - 2n\overrightarrow{SA_1} = 2n\left(\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1}\right) + \overrightarrow{SB_1}$

$= 2n\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{SB_1}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB_1} = 2n\overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow \overrightarrow{B_1D} = 2n\overrightarrow{A_1B_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1D}$ cùng phương với $\overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow A_1, B_1, D$ thẳng hàng.

Vậy đường thẳng A_1B_1 đi qua điểm cố định D.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên theo cách sau mặc dù dài hơn nhưng qua cách giải này ta thấy được điểm D được chọn như thế nào.

Ta có $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1} = \frac{1}{2n+1}\overrightarrow{SB} - \frac{1}{n}\overrightarrow{SA} = \frac{1}{n(2n+1)}\left[n\overrightarrow{SB} - (2n+1)\overrightarrow{SA}\right]$

$$=\frac{1}{n(2n+1)}\left[n\left(\overrightarrow{SB}-2\overrightarrow{SA}\right)-\overrightarrow{SA}\right]=\frac{1}{n(2n+1)}\left[n\left(\overrightarrow{SB}-2\overrightarrow{SA}\right)-n\overrightarrow{SA_1}\right] \quad (1).$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(\overrightarrow{SB}-2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SA_1}\right)$$

Gọi D là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SB}-2\overrightarrow{SA}$ thì điểm D cố định

Từ (1) suy ra $\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{1}{2n+1}\left(\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA_1}\right)=\frac{1}{2n+1}\overrightarrow{A_1D}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{A_1D} \Rightarrow A_1, B_1, D$ thẳng hàng.

Chứng minh đường thẳng A_1C_1 đi qua một điểm cố định.

$$\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{SC_1}-\overrightarrow{SA_1}=\frac{1}{3n+2}\overrightarrow{SC}-\frac{1}{n}\overrightarrow{SA}=\frac{1}{n3(n+2)}\left[n\overrightarrow{SC}-(3n+2)\overrightarrow{SA}\right]$$

$$=\frac{1}{n(3n+2)}\left[n\left(\overrightarrow{SC}-3\overrightarrow{SA}\right)-2\overrightarrow{SA}\right]=\frac{1}{n(3n+2)}\left[n\left(\overrightarrow{SC}-3\overrightarrow{SA}\right)-2n\overrightarrow{SA_1}\right]$$

$$=\frac{1}{3n+2}\left(\overrightarrow{SC}-3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SA_1}\right)(2).$$

Gọi E là điểm xác định bởi hệ thức $2\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SC}-3\overrightarrow{SA}$ thì điểm E cố định.

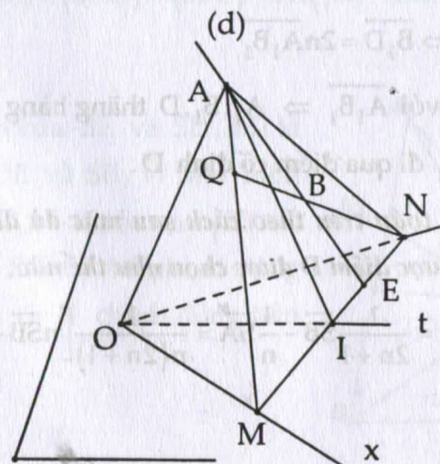
Từ (2) suy ra $\overrightarrow{A_1C_1}=\frac{1}{3n+2}\left(2\overrightarrow{SE}-2\overrightarrow{SA_1}\right)=\frac{2}{3n+2}\overrightarrow{A_1E}$.

Vậy A_1, C_1, E thẳng hàng hay đường thẳng A_1C_1 đi qua điểm cố định E.

Mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ chứa một đường thẳng cố định.

Vì hai điểm cố định D, E thuộc mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ nên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ chứa đường thẳng cố định DE.

73.



a) ***Chứng minh*** AI ***chứa trong mặt phẳng cố định.***

Tam giác OMN cân tại O (do OM = ON) nên I thuộc đường phân giác Ot của góc $\widehat{xOy}$, suy ra AI chứa trong mặt phẳng cố định (A, Ot).

b) ***i) Đường thẳng*** MN ***đi qua một điểm cố định.***

Gọi E là giao điểm của (d) và đường thẳng MN thì E cũng là giao điểm của (d) và (P) nên E cố định. Vậy MN đi qua cố định E.

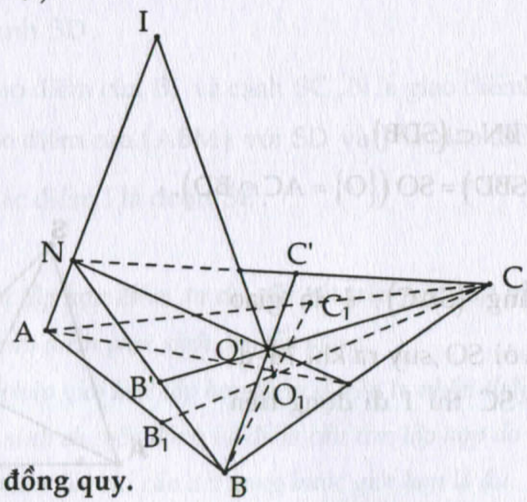
ii) Giao điểm Q ***của*** AM, BN ***thuộc hai mặt phẳng cố định.***

$Q \in AM \Rightarrow Q \in mp(A, Ox)$ cố định.

$Q \in BN \Rightarrow Q \in mp(B, Oy)$ cố định.

Suy ra Q thuộc đường thẳng cố định là giao tuyến của hai mặt phẳng (A, Ox) và (B, Oy).

74.



a) AO_1, SO', BC đồng quy.

Ta có $BC=(ABC)\cap(SBC)$, $SO'=(IAO_1)\cap(SBC)$, $AO_1=(IAO_1)\cap(ABC)$, lại có AO_1 cắt BC suy ra ba đường thẳng AO_1, SO', BC đồng quy.

b) I, B_1, B' thẳng hàng, I, C_1, C' thẳng hàng.

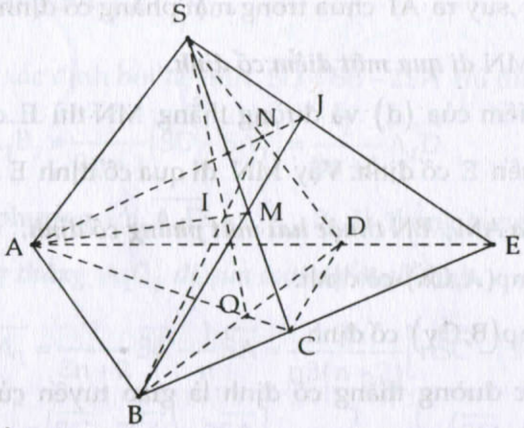
$B_1 \in AB$, $B' \in SB$, $I \in SA$ nên ba điểm I, B_1, B' thuộc mặt phẳng (SAB).

$I \in O_1O'$, O_1O' chứa trong mặt phẳng α nên $I \in \alpha$, suy ra ba điểm I, B_1, B thuộc mặt phẳng α.

Vậy I, B_1, B' là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt α và (SAB) do đó chúng thẳng hàng.

Tương tự I, C_1, C' là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt β và (SAC) nên chúng thẳng hàng.

75.



a) Tập hợp các điểm I.

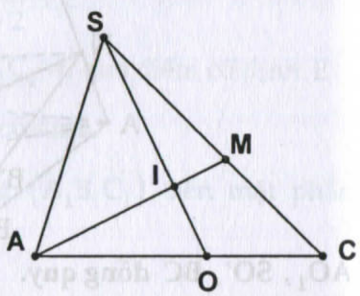
Phần thuận.

$$\begin{cases}\{I\} = AM \cap BN \\ AM \subset (SAC),\ BN \subset (SDB)\end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) = SO\ (\{O\} = AC \cap BD)$.

Giới hạn.

Trong mặt phẳng (SAC), I là giao điểm của AM với SO, suy ra khi M di động trên cạnh SC thì I di động trên đoạn SO.



Phần đảo.

Lấy một điểm I tùy ý trên đoạn SO, ta phải dựng điểm M sao cho I là giao điểm của AM và BN, trong đó N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với cạnh SD.

Dựng M là giao điểm của AI và cạnh SC, N là giao điểm của BI và cạnh SD. Ta có N là giao điểm của (ABM) với SD và I là giao điểm của AM, BN. Vậy tập hợp các điểm I là đoạn SO.

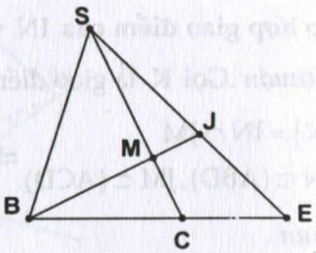
b) Tập hợp các điểm J.

Phần thuận.

$$\begin{cases}\{J\} = AN \cap BM \\ AN \subset (SAD),\ BM \subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC) = SE.$$

Giới hạn.

Trong mặt phẳng (SBC), J là giao điểm của BM với SE, suy ra khi M di động trên cạnh SC thì I di động trên đoạn SE.



Phần đảo.

Lấy một điểm J tùy ý trên đoạn SE, ta phải dựng điểm M sao cho J là giao điểm của AN và BM, trong đó N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với cạnh SD.

Dựng M là giao điểm của BJ và cạnh SC, N là giao điểm của AJ và cạnh SD.

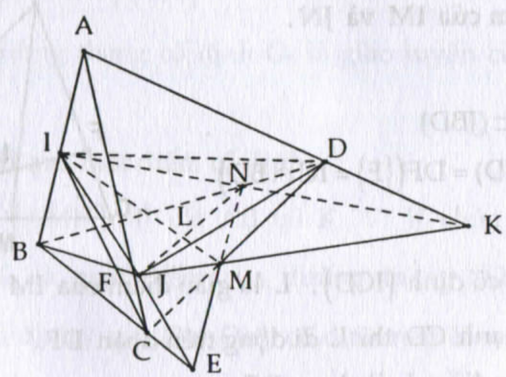
Ta có N là giao điểm của (ABM) với SD và J là giao điểm của AN, BM.

Vậy tập hợp các điểm I là đoạn SE.

Nhận xét :

* *Khi xét giới hạn tập hợp điểm ,ta chỉ cần xét trên một mặt phẳng cố định, tốt nhất là mặt phẳng chứa điểm phát sinh chuyển động.*
* *Trong phương pháp giới hạn tập hợp điểm ở trên ta nhận thấy có sự tương ứng 1-1 giữa điểm phát sinh chuyển động và điểm cần tìm tập hợp do đó trong bài toán trên không cần xét phần đảo chỉ cần xét xong bước giới hạn là đủ.*

76.



a) Đường thẳng MN đi qua điểm cố định.

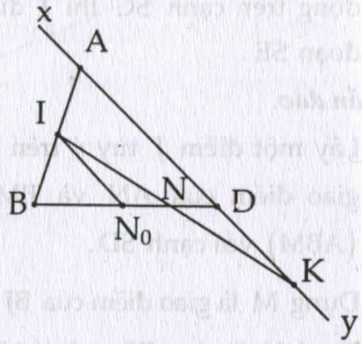
Gọi E là giao điểm của IJ với BC thì E cố định. Ba điểm E, M, N là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (BCD) nên chúng thẳng hàng, suy ra đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định E.

b). Tập hợp giao điểm của IN và JM.

Phần thuận. Gọi K là giao điểm của IN và JM. Ta có

$$\begin{cases}\{K\} = IN \cap JM \\ IN \subset (ABD), JM \subset (ACD)\end{cases} \Rightarrow K \in (ACD) \cap (ABD) = AD.$$

Giới hạn.



Vì theo giả thiết bài toán, mặt phẳng (P) di động nhưng luôn cắt các cạnh BD và CD do đó ta phải xét xem có vị trí nào của N trên cạnh BD thì M ở ngoài đoạn CD không? Nếu có thì vị trí này của N phải loại ra.

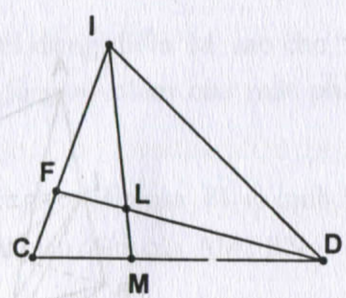
Ta có M là giao điểm của EN với cạnh CD, EC cắt BD tại B, ED cắt BD tại D do đó không có vị trí nào của N trên cạnh BD mà M không thuộc cạnh CD.

Trong mặt phẳng cố định (ABD), K là giao điểm của đường thẳng IN và đường thẳng AD do đó khi N di động trên cạnh BD thì K di động trên hai tia Ax, Dy nằm trên đường thẳng AD như hình vẽ bên.

Phần đảo

Suy ra tập hợp các điểm K là hai tia Ax, Dy.

c) Tập hợp giao điểm của IM và JN.



$$\begin{cases}\{L\} = IM \cap JN \\ IM \subset (ICD), JN \subset (JBD)\end{cases}$$

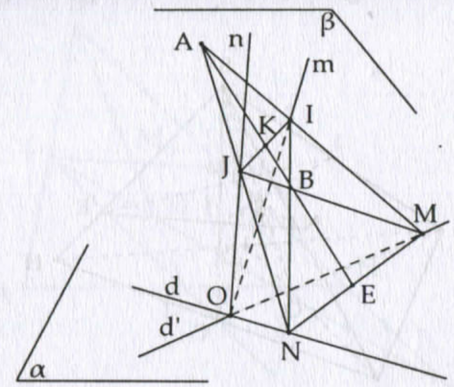
$$\Rightarrow L \in (ICD) \cap (JBD) = DF\left(\{F\} = IC \cap BD\right)$$

Giới hạn.

Trong mặt phẳng cố định (ICD), L là giao điểm của IM và DF, do đó khi M di động trên cạnh CD thì L di động trên đoạn DF.

Suy ra tập hợp các điểm L là đoạn DF.

77.



a) MN đi qua một điểm cố định.

Gọi E là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng α thì E là điểm cố định.

Ba điểm M, N, E là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt α và β nên chúng thẳng hàng, vậy MN đi qua điểm cố định E.

b) Giao điểm I của AM và BN thuộc một đường thẳng cố định.

$$\begin{cases}\{I\} = AM \cap BN \\ AM \subset mp(A,d), BN \subset mp(B,d')\end{cases}$$

Suy ra I thuộc đường thẳng cố định Om là giao tuyến của hai mặt phẳng (A,d) và (B,d').

c) Giao điểm J của AN và BM thuộc một đường thẳng cố định.

$$\begin{cases}\{J\} = AN \cap BM \\ AN \subset mp(A,d'), BM \subset mp(B,d)\end{cases}$$

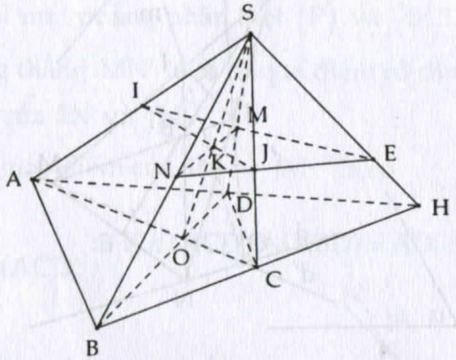
Suy ra J thuộc đường thẳng cố định O_n là giao tuyến của hai mặt phẳng (A,d') và (B,d).

d) Đường thẳng IJ đi qua một điểm cố định.

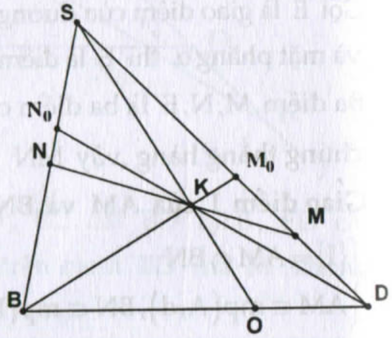
Trong mặt phẳng (AMN), IJ cắt AB tại K. Vì IJ chứa trong mặt phẳng (Om,On) nên K là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Om,On), AB cố định, $mp(Om,On)$ cố định nên K cố định. Vậy IJ đi

qua điểm cố định K là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Om,On).

78.



a) M,N di động trên phần nào của cạnh SD, SB. Tập hợp giao điểm của IM và JN.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm của SO và IJ thì K cố định. Ba điểm M,K,N là ba điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (SBD) nên chúng thẳng hàng.

Trong tam giác SBD, gọi M_0 là giao điểm của BK và SD, N_0 là giao điểm của DK và SB vì M,K,N thẳng hàng nên nếu N thuộc đoạn BN_0 thì M thuộc đoạn DM_0, nếu N thuộc đoạn SN_0 (N khác N_0) thì M ở ngoài đoạn SD.

Tương tự để N ở trên cạnh SB là M chỉ ở trên đoạn DM_0.

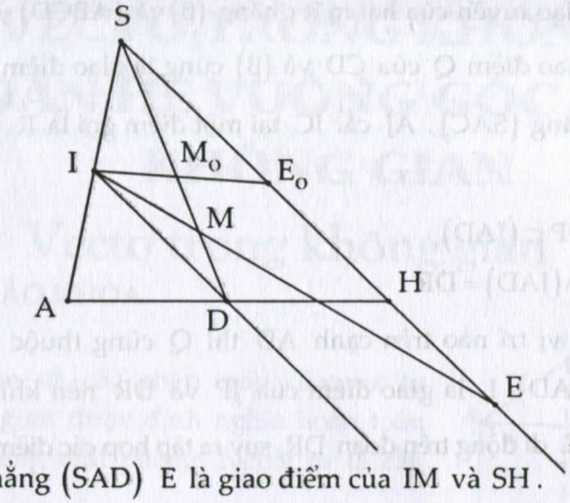
Vậy N chỉ di động trên đoạn BN_0 và M chỉ di động trên đoạn DM_0.

Gọi H là giao điểm của AD và BC.

$$\begin{cases}\{E\} = IM \cap JN \\ IM \subset (SAD), JN \subset (SBC)\end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC) = SH.$

Giới hạn.



Trong mặt phẳng (SAD) E là giao điểm của IM và SH.

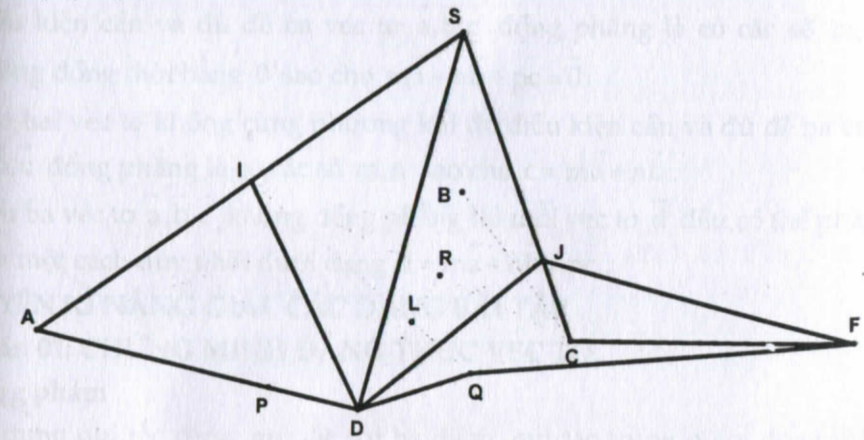
Khi $M \equiv M_0$ thì $E \equiv E_0$ (E_0 là giao điểm của IM_0 và SH).

Vì D là trung điểm của AH, I là trung điểm của SA nên ID // SH do đó khi M tiến về D thì tia IM tiến đến tia ID suy ra E tiến về vô cực trên tia E_0t cùng chiều với tia SH.

Khi M di động trên đoạn DM_0 thì E di động trên tia E_0t.

Suy ra tập hợp các điểm E là tia E_0t.

b) Tìm $\{Q\} = (\beta) \cap CD$ và tìm tập hợp giao điểm của IQ và JP.



Trong tam giác SAC, I là trung điểm của SA, J thuộc cạnh SC và JS > JC nên đường thẳng IJ cắt đường thẳng AC, gọi giao điểm của chúng là F.

Ta có FP là giao tuyến của hai mặt phẳng (β) và $(ABCD)$, CD chứa trong $(ABCD)$ nên giao điểm Q của CD và (β) cũng là giao điểm của FP và CD.

Trong mặt phẳng (SAC), AJ cắt IC tại một điểm gọi là R.

$$\begin{cases}\{L\} = IQ \cap JP \\ IQ \subset (ICD), JP \subset (JAD)\end{cases}.$$

$$\Rightarrow L \in (ICD) \cap (JAD) = DR$$

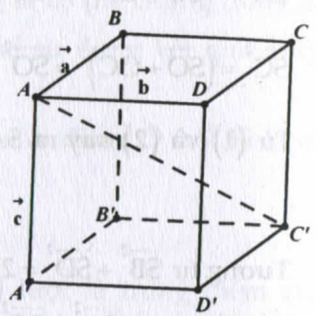
Vì P ở bất kì vị trí nào trên cạnh AD thì Q cũng thuộc cạnh CD, trong mặt phẳng (JAD) L là giao điểm của JP và DR nên khi P di động trên đoạn AD thì L di động trên đoạn DR suy ra tập hợp các điểm L là đoạn DR.

CHỦ ĐỀ: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ trong không gian

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa.



Các khái niệm và các phép toán của vec tơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra ta cần nhớ thêm:

Qui tắc hình hộp: Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Qui tắc trọng tâm tứ diện.

G là trọng tâm tứ diện ABCD khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra:

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \forall M$

3. Ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện cần và đủ để ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

Cho hai vec tơ không cùng phương khi đó điều kiện cần và đủ để ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m,n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Nếu ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vec tơ $\vec{d}$ đều có thể phân tích một cách duy nhất dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

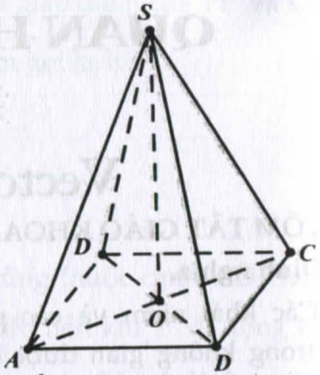
Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Phương pháp:

Sử dụng qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ giác, qui tắc hình bình hành, qui tắc hình hộp… để biến đổi vế này thành vế kia.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$.



Lời giải

Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD

Ta có $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$

$\overrightarrow{SA}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$ (1)

$\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$

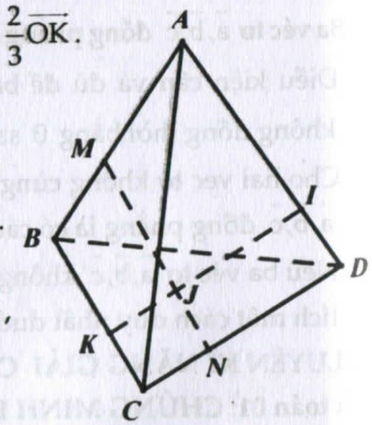
$=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2$ (vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$).

Tương tự $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OD}^2$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD, M và N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}=-2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM}=k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB}=k\overrightarrow{KC}$.

Chứng minh với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.



Lời giải

Vì $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ nên với điểm O bất kì ta có:

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=-2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$

Tương tự ta có: $\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OI}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OD}}{1-k}$,

$\overrightarrow{OK}=\frac{\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OC}}{1-k}, \overrightarrow{OJ}=\frac{\overrightarrow{OM}-k\overrightarrow{ON}}{1-k}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{1-k}.\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OD}-2k\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{1-k}.\frac{1}{3}[(1-k)\overrightarrow{OI}+2(1-k)\overrightarrow{OK}]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OK}\right)$

Vậy $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH BA VEC TƠ ĐỒNG PHẲNG VÀ BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

Để chứng minh ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

- Chứng minh giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng.
- Phân tích $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vec tơ không cùng phương.

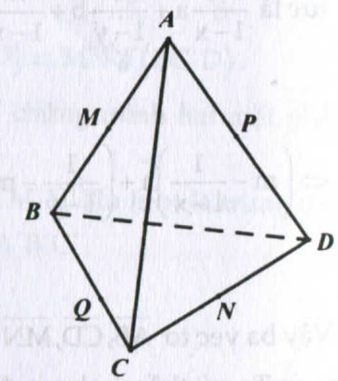
Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau:

Điều kiện cần và đủ để điểm $D\in(ABC)$ là với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi P, Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}(k\neq 1)$. Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MP}=k\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MP}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Suy ra $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

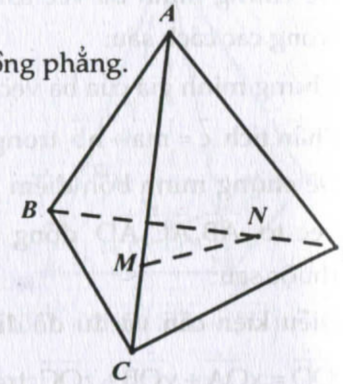
$=\frac{k}{k-1}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$)

Mặt khác N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$ suy ra ba vec tơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, hay bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N xác định bởi $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}\ (x,y\neq 1)$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec a,\overrightarrow{DB}=\vec b,\overrightarrow{DC}=\vec c$ thì $\vec a,\vec b,\vec c$ không đồng phẳng.

$\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC}\Rightarrow \overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DM}=x\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DM}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DA}-x\overrightarrow{DC}}{1-x}=\dfrac{\vec a-x\vec c}{1-x}$ (1).

Lại có $\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{1-y}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{1-y}\vec b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\dfrac{-1}{1-x}\vec a+\dfrac{1}{1-y}\vec b+\dfrac{x}{1-x}\vec c$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec b-\vec a,\overrightarrow{CD}=-\vec c$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vec tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}$,

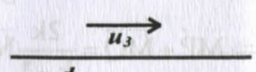
tức là $\dfrac{-1}{1-x}\vec a+\dfrac{1}{1-y}\vec b+\dfrac{x}{1-x}\vec c=m\left(\vec b-\vec a\right)-n\vec c$

$$\Leftrightarrow\left(m-\frac{1}{1-x}\right)\vec a+\left(\frac{1}{1-y}-m\right)\vec b+\left(n+\frac{x}{1-x}\right)\vec c=\vec 0\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{1-x}\\ m=\dfrac{1}{1-y}\\ n=-\dfrac{x}{1-x}\end{cases}\Rightarrow x=y$$

Vậy ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x=y$.

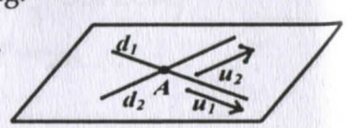
Lưu ý: Ta có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vec tơ để xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng:

Cho ba đường thẳng d_1,d_2,d_3 lần lượt chứa ba vec tơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ trong đó d_1,d_2 cắt nhau và $d_3\not\subset mp(d_1,d_2)$.



Khi đó:

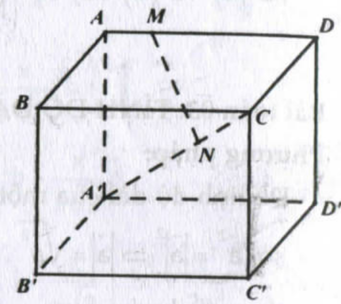
- $d_3 /\!/ (d_1,d_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ đồng phẳng.
- $d_3\cap mp(d_1,d_2)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ không đồng phẳng



Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M,N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $MN /\!/ (BC'D)$.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec a,\overrightarrow{BB'}=\vec b,\overrightarrow{BC}=\vec c$ thì $\vec a,\vec b,\vec c$ là ba vec tơ không đồng phẳng và



$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec a+\vec c$

$\overrightarrow{BC'}=\vec b+\vec c,\overrightarrow{BA'}=\vec a+\vec b$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BM}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{5}{4}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{5}=\dfrac{4\vec a+\left(\vec a+\vec c\right)}{5}=\dfrac{5\vec a+\vec c}{5}$.

Tương tự $\overrightarrow{BN}=\dfrac{3\vec a+3\vec b+2\vec c}{5}$,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{-2\vec a+3\vec b+\vec c}{5}=-\frac{2}{5}\left(\vec a+\vec c\right)+\frac{3}{5}\left(\vec b+\vec c\right)=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$$

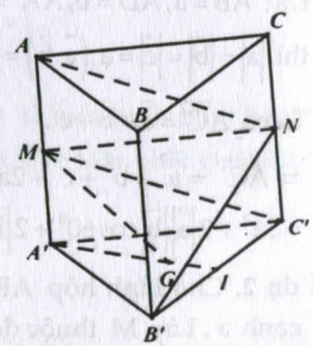
Suy ra $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng mà $N\notin(BC'D)\Rightarrow MN /\!/ (BC'D)$.

Nhận xét: Có thể sử dụng phương pháp trên để chứng minh hai mặt phẳng song song.

Ví dụ 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Chứng minh $(MGC') /\!/ (AB'N)$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec a,\overrightarrow{AB}=\vec b,\overrightarrow{AC}=\vec c$

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}\vec a$,

$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{1}{2}\vec a+\vec b$

Vì G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\vec a+\dfrac{1}{3}\vec b+\dfrac{1}{3}\vec c$

Ta có $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ suy ra $\overrightarrow{MG},\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AN}$ đồng phẳng. Mặt khác $G\notin(AB'N)\Rightarrow MG\,//\,(AB'N)$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{k}=\overrightarrow{AN}\Rightarrow MC'\,//\,(AB'N)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}MG//(AB'N)\\ MC'(AB'N)\end{cases}\Rightarrow(MGC')\,//\,(AB'N)$.

Bài toán 03: TÍNH ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.

Phương pháp:

Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

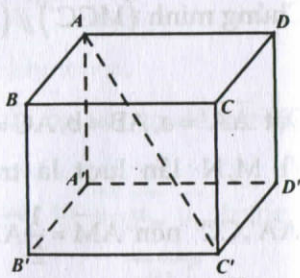
- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sao cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích $\overrightarrow{MN}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$
- Khi đó $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\overrightarrow{MN}^2}=\sqrt{\left(m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}\right)^2}$

$$=\sqrt{m^2|\vec{a}|^2+n^2|\vec{b}|^2+p^2|\vec{c}|^2+2mn\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+2np\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)+2mp\cos\left(\vec{c},\vec{a}\right)}.$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và các góc $\widehat{BAA'}=\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=60^0$. Tính độ dài đường chéo AC'.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$

thì $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\right)=60^0$.

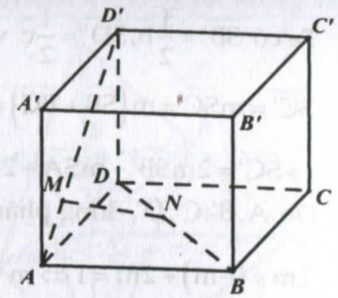
Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AC'}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}$

$=3a^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^0+2|\vec{b}||\vec{c}|\cos60^0+2|\vec{c}||\vec{a}|\cos60^0=6a^2\Rightarrow AC'=a\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Lấy M thuộc đoạn A'D, N thuộc đoạn BD với: $AM=DN=x\left(0<x<a\sqrt{2}\right)$. Tính MN theo a và x.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$

Ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\right)=90^0$

$\overrightarrow{DN}=\frac{DN}{DB}.\overrightarrow{DB}=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AM}=\frac{AM}{AD'}.\overrightarrow{AD'}=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}+\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

$=\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}$.

$MN^2=\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}\right)^2=\frac{x^2}{2a^2}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2\vec{b}^2+\frac{x^2}{2a^2}\vec{c}^2$

$=x^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}\right)a^2=\frac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2$

$MN=\sqrt{\frac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2}$.

Bài toán 04: SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN.

Phương pháp:

Sử dụng các kết quả

- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{DC}$
- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trungđiểm của các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính $\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SA},\vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $m=\frac{SC'}{SC}$

Ta có $\overrightarrow{SB'}=\frac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{SD'}=\frac{1}{2}\vec{c}$ và

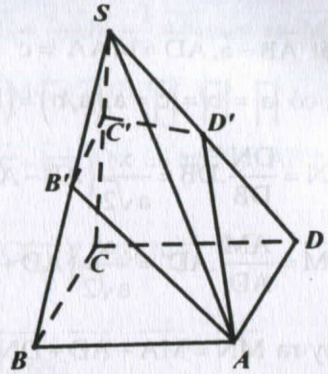
$\overrightarrow{SC'}=m\overrightarrow{SC}=m\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}\right)=m\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SC'}=2m\overrightarrow{SB'}-m\overrightarrow{SA}+2m\overrightarrow{SD'}$

Do A,B',C',D' đồng phẳng nên

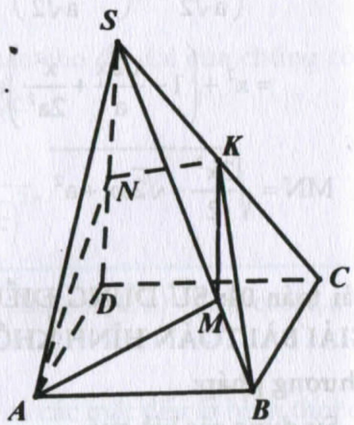
$2m+(-m)+2m=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$

Vậy $\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N. Chứng minh $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Lời giải



Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SA},\vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $\frac{SB}{SM}=m,\ \frac{SD}{SN}=n$.

Ta có $\overrightarrow{SM}=\frac{SM}{SB}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{m}\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SN}=\frac{SN}{SD}\overrightarrow{SD}=\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$

$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)$

$=\frac{n}{2}\overrightarrow{SN}+\frac{m}{2}\overrightarrow{SM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$.

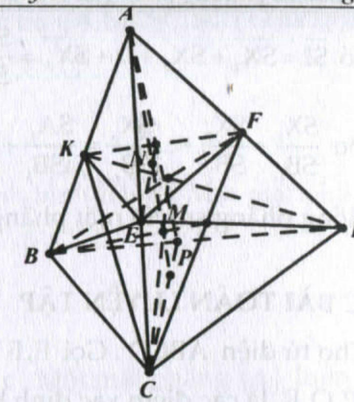
Mặt khác ta có A, M, K, N đồng phẳng nên $\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow m+n=3$.

Vậy $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD, trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm K, E, F. Các mặt phẳng (BCF), (CDK), (BDE) cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt (KEF) tại N và cắt mặt phẳng (BCD) tại P. Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

Lời giải

- Chỉ ra sự tồn tại của điểm M.



Gọi $I=CF\cap BK \Rightarrow CI=(BCF)\cap(CDK)$

Gọi $J=DE\cap CF\Rightarrow (BCF)\cap(BDE)=BJ$

Khi đó $M=CI\cap BJ$ chính là giao điểm của ba mặt phẳng (BCF), (CDK), (BDE).

- Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}=\beta\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}=\gamma\overrightarrow{AF}$

Do M, N thuộc đoạn AP nên tồn tại các số $m,n>1$ sao cho $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AN}$.

Ta có B, C, D, P đồng phẳng nên tồn tại x, y, z với $x+y+z=1$ (1) sao cho

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\alpha x\overrightarrow{AK}+\beta y\overrightarrow{AE}+\gamma z\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{\alpha x}{n}\overrightarrow{AK}+\frac{\beta y}{n}\overrightarrow{AE}+\frac{\gamma z}{n}\overrightarrow{AF}$

Mặt khác $N\in(KEF)$ nên $\frac{\alpha x}{n}+\frac{\beta y}{n}+\frac{\gamma z}{n}=1\Leftrightarrow \alpha x+\beta y+\gamma z=n$ (2).

Làm tương tự ta có $M\in(BCE)\Rightarrow x+y+\gamma z=m$ (3)

$M\in(CDK)\Rightarrow x+\beta y+\gamma z=m$ (4)

$M\in(BDE)\Rightarrow \alpha x+y+z=m$ (5)

Từ (3),(4),(5) suy ra $2(x+y+z)+\alpha x+\beta y+\gamma z=3m$

Kết hợp với (1),(2) ta được: $2+n=3m$

$\Leftrightarrow 2+\frac{AP}{AN}=3\frac{AP}{AM}\Leftrightarrow 3+\frac{NP}{NA}=3\left(1+\frac{MP}{MA}\right)\Leftrightarrow\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.(đpcm)

Ví dụ 4. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n\ (n\geq 2)$ nằm trong (P) và S là một điểm nằm ngoài (P). Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1,SA_2,...,SA_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tại các điểm $B_1,B_2,...,B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SB_2}{SB_2}+...+\frac{SA_n}{SB_n}=a$ ($a>0$ cho trước). Chứng minh (α) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Trên các cạnh SA_i lấy các điểm $X_i\ (i=1,2,..n)$ sao cho $SX_i=\frac{SA_i}{a}$

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SX_1}+\overrightarrow{SX_2}+...+\overrightarrow{SX_n}$ thì I là điểm cố định (do các điểm S và $X_1,X_2,...,X_n$ cố định)

Ta có $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SX_1} + \overrightarrow{SX_2} + ... + \overrightarrow{SX_n} = \frac{SX_1}{SB_1}\overrightarrow{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2}\overrightarrow{SB_2} + ... + \frac{SX_n}{SB_n}\overrightarrow{SB_n}$

Do $\frac{SX_1}{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2} + ... \frac{SX_n}{SB_n} = \frac{SA_1}{aSB_1} + \frac{SA_2}{aSB_2} + ... + \frac{SA_n}{aSB_n} = 1$ nên các điểm $I, B_1, B_2, ..., B_n$ đồng phẳng suy ra mặt phẳng (α) đi qua điểm I cố định.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ còn P, Q, R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.

a) Chứng minh $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

c) Xác định vị trí của M để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho MN // BD'. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{B'A'D'} = 60^0, \widehat{B'A'A} = \widehat{D'A'A} = 120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với A'D; AC' với B'D.

b) Tính diện tích các tứ giác A'B'CD và ACC'A'.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA'.

5. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC được tính theo công thức $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

6. Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

7. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

8. Cho hình chóp S.ABC, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G'.

Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$.

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.

Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

10. Cho hình chóp S.ABC có SA = a, SB = b, SC = c. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$.

11. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) lần lượt tại A', B', C', D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt A'B', A'C', A'D' tại các điểm B_1, C_1, D_1. Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

12. Cho tứ diện ABCD có BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2}$.

13. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \ne 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

14. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng AA', BC, C'D' lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

15. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện SABC. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng (BCM), (CAN), (ABP) và J là giao điểm của ba mặt phẳng (ANP), (BPM), (CMN).

Chứng minh S, I, J thẳng hàng và $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

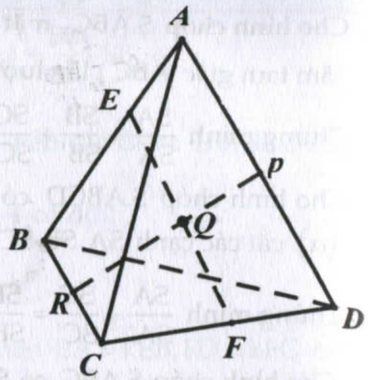
1. Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FQ}$ (2)

Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ}=l\overrightarrow{PD}+l\overrightarrow{DF}+l\overrightarrow{FQ}$ (3)

Lấy (1)−(3) theo vế ta có

$(1-l)\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AE}-l\overrightarrow{DF}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$



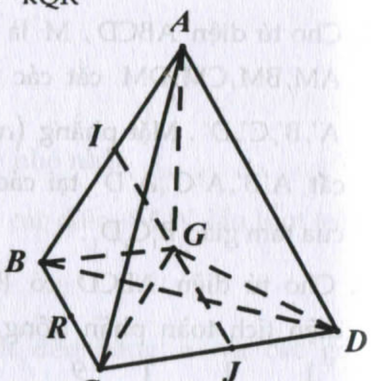
Tương tự $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ nên:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}=\frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC}=-k\overrightarrow{QR}$$

Vậy P,Q,R thẳng hàng.

2. a) $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.



b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.

c) Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nên:

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv G$.

3. $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$.

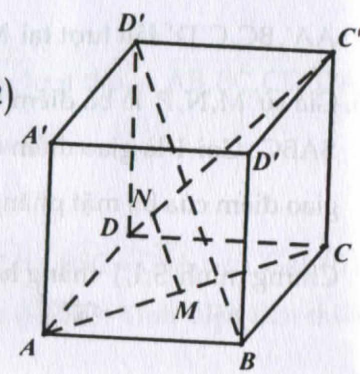
Dễ dàng có các biểu diễn $\overrightarrow{BM}=(1-x)\vec{a}+x\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN}=(1-y)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}$ (1)

Để MN // BD' thì $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

$\Leftrightarrow(x-y-z)\vec{a}+(1-x-z)\vec{b}+(y-z)\vec{c}=\vec{0}$

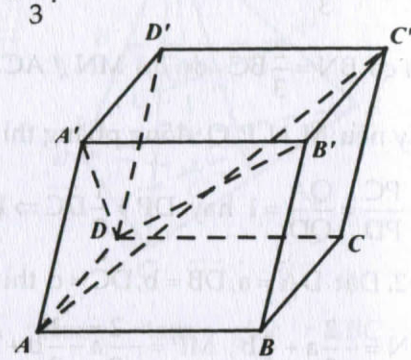


$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z=0\\1-x-z=0\\y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{1}{3}\end{cases}.$$

Vậy các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

Ta cũng có $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}\Rightarrow\frac{MN}{BD'}=\frac{1}{3}$.

4. a) Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{A'B'}=\vec{b},\overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$



Ta có $\overrightarrow{A'D}=\vec{a}+\vec{c}$ nên

$\cos\left(AB,A'D\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}\right)\right|$

$=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}+\vec{c}\right|}$.

Để ý rằng $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=a$, $\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{a^2}{2}$.

Từ đó $\cos\left(AB,A'D\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(AB,A'D\right)=60^0$

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

Từ đó tính được $\overrightarrow{AC'}\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0\Rightarrow\left(AC',B'D\right)=90^0$.

b) $\overrightarrow{A'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0$

$\Rightarrow A'C\perp B'D$ nên $S_{A'B'DC}=\frac{1}{2}A'C.B'D$.

Dễ dàng tính được $A'C=a\sqrt{2},B'D=a\sqrt{2}\Rightarrow S_{A'B'CD}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}a.\sqrt{2}=a^2$

$S_{AA'C'C}=AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)$, $AA'=a,Ac=a\sqrt{3}$.

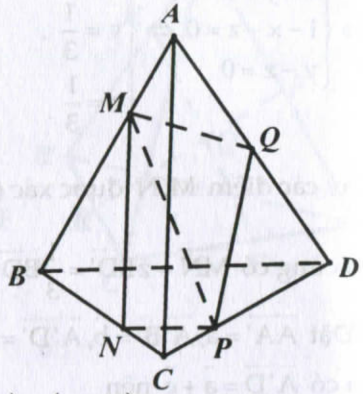
Tính được $\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $S_{AA'C'C}=AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)=a.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}=a^2\sqrt{2}$.

c) ĐS: $\left(\widehat{AC',AB}\right)=\left(\widehat{AC',AD}\right)=\left(\widehat{AC',AA'}\right)=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. $S_{ABC}=\frac{1}{2}ABAC\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.



6. *Cách 1.*

Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ do đó $MN\,//\,AC$.

Vậy nếu M,N,P,Q đồng phẳng thì $(MNPQ)\cap(ACD)=PQ\,//\,AC$

$\Rightarrow\frac{PC}{PD}=\frac{QA}{QD}=1$ hay $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec a,\overrightarrow{DB}=\vec b,\overrightarrow{DC}=\vec c$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec a+\frac{2}{3}\vec b$, $\overrightarrow{MP}=-\frac{2}{3}\vec a-\frac{1}{3}\vec b+k\vec c$, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{6}\vec a-\frac{1}{3}\vec b$

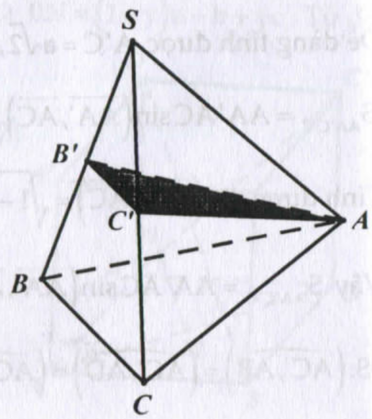
Các điểm M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\exists x,y:\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\vec a-\frac{1}{3}\vec b+k\vec c=x\left(-\frac{2}{3}\vec a+\frac{2}{3}\vec c\right)+y\left(-\frac{1}{6}\vec a-\frac{1}{3}\vec b\right)$

Do các vec tơ $\vec a,\vec b,\vec c$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}x=k\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4},y=1,k=\frac{1}{2}.$$

7. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của SB,SC. Thiết diện là tam giác $AB'C'$.



Theo bài tập 5 thì:

$S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{AB'^2AC'^2-\left(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}\right)^2}$

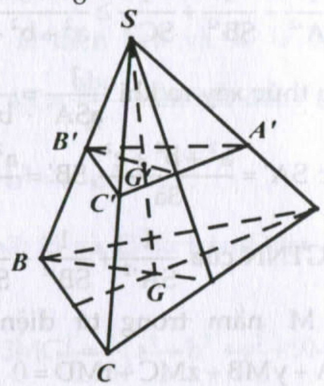
Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{SB'}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

$\Rightarrow AB'^2=\frac{1}{4}SB^2+SA^2-\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SB}=\frac{a^2}{4}(5-4\cos\alpha)$.

Tính tương tự, ta có: $\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{AC'}=\frac{a^2}{4}(4-3\cos\alpha)$.

Vậy $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16}(5-4\cos\alpha)^2-\frac{a^4}{16}(4-3\cos\alpha)^2}=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$.

8. Do G là trọng tâm của ΔABC nên



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec 0\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow 3\frac{SG}{SG'}\overrightarrow{SG'}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$

Mặt khác A',B',C',G' đồng phẳng nên

$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

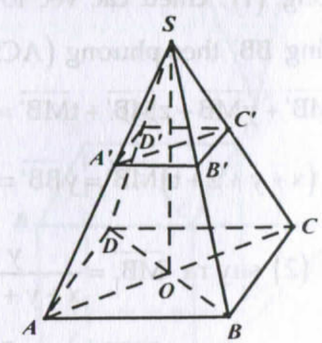
Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng:

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec 0$ trong đó S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB. Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',M'.

Chứng minh: $\frac{S_aSA}{SA'}+\frac{S_bSB}{SB'}+\frac{S_cSC}{SC'}=\frac{S.SM}{SM'}$ (Với S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB và S là diện tích tam giác ABC).

9. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$



$\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SC'}=\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$

Do A',B',C',D' đồng phẳng nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

10. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

Mà G, A', B', C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3 \Leftrightarrow \frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$

Theo BĐT Cauchy–Schwarz:

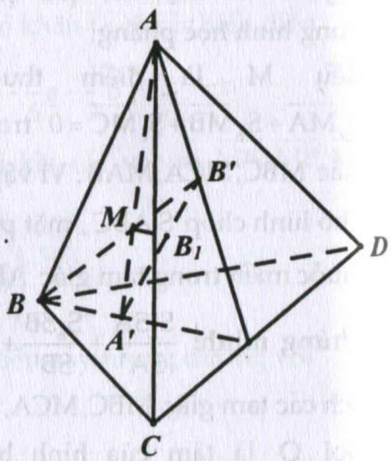
Ta có $\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)(a^2+b^2+c^2) \ge \left(\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{aSA'}=\frac{1}{bSB'}=\frac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$ ta được $SA'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3a}, SB'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3b}, SC'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3c}$.

Vậy GTNN của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$ là $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

11. Vì M nằm trong tứ diện ABCD nên tồn tại $x,y,z,t>0$ sao cho $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ (1)



Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD).

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,(BCD)\\(BB'A')\cap(\alpha)=MB_1\\(BB'A')\cap(BCD)=BA'\end{cases} \Rightarrow MB_1\,//\,BA'$.

Do đó $\frac{MB_1}{BA'}=\frac{MB'}{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1}=\frac{MB'}{BB'}\overrightarrow{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$x\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MB'}+t\overrightarrow{MB'}=\vec{0} \Rightarrow (x+y+z)\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Rightarrow (x+y+z+t)\overrightarrow{MB'}=y\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \frac{MB'}{BB'}=\frac{y}{x+y+z+t}$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1}=\frac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}$ (3)

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1}=\frac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}$ (4)

$$\overrightarrow{MD_1}=\frac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'} \quad (5)$$

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' thì thu được $y\overrightarrow{A'B}+z\overrightarrow{A'C}+t\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$. Vậy từ (3),(4),(5) ta có $\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=\frac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'}+z\overrightarrow{CA'}+t\overrightarrow{DA'}\right)=\vec{0}$, hay M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

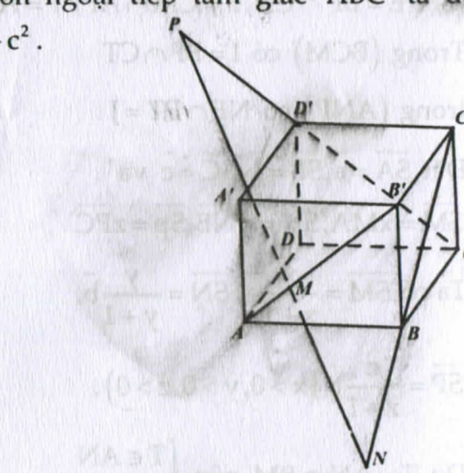
12. Do tứ diện ABCD có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$ nên $\Delta BCD=\Delta ADC=\Delta DAB=\Delta CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S=4S'=\frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$.

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+BC^2+3MG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+9MG^2)$$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2=a^2+b^2+c^2+9OG^2 \ge a^2+b^2+c^2$.

13. Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.



Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{AM}=\frac{k}{k-1}(\vec{b}+\vec{c})$ (1)

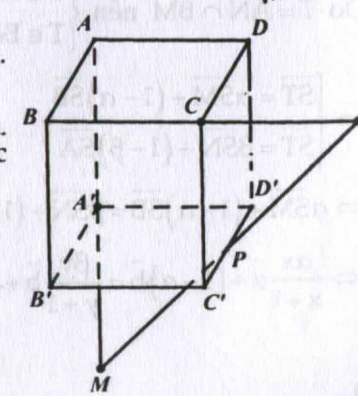
$\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\frac{x}{x-1}(\vec{a}+\vec{c})$ (2)

$\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{y}{y-1}(\vec{c}-\vec{b})$ (3)

Từ đó ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$

$=\frac{x}{x-1}\vec{a}-\frac{1}{k-1}\vec{b}+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\left(\frac{y}{y-1}+\frac{1}{k-1}\right)\vec{b}+\left(\frac{y}{y-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$



Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$ (*).

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào (*) và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x=\dfrac{1+k}{1-k}, y=-\dfrac{1}{k}$.

14. Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Vì $M\in AA'$ nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}=k\vec{c}$

$N\in BC\Rightarrow \overrightarrow{BN}=l\overrightarrow{BC}=l\vec{a}$, $P\in C'D'\Rightarrow \overrightarrow{C'P}=m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}$

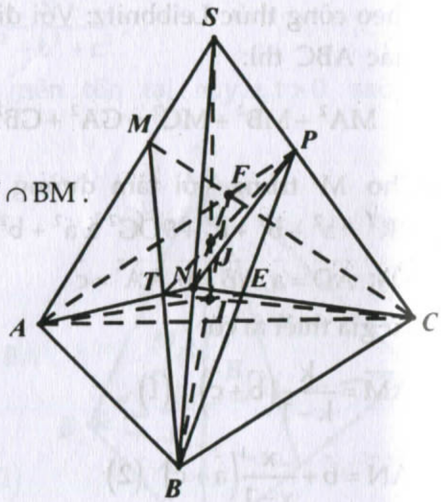
$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'P}=(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NP}\Rightarrow -l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}=2[(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-l=2(1-l)\\-1=2m\\k=2\end{cases}\Leftrightarrow k=2, m=-\frac{1}{2}, l=2.$$

Vậy $\dfrac{MA}{MA'}=2$.

15. Gọi $E=BP\cap CN, F=CM\cap AP, T=AN\cap BM$.



Trong (BCM) có $I=BF\cap CT$

trong (ANP) có $NF\cap PT=J$.

Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$ và

$\overrightarrow{SM}=x\overrightarrow{MA},\overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{NB},\overrightarrow{Sp}=z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM}=\dfrac{x}{x+1}\vec{a}$, $\overrightarrow{SN}=\dfrac{y}{y+1}\vec{b}$,

$\overrightarrow{SP}=\dfrac{z}{z+1}\vec{c}\ (x>0,y>0,z>0)$.

Do $T=AN\cap BM$ nên $\begin{cases}T\in AN\\T\in BM\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{ST}=\alpha\overrightarrow{SM}+(1-\alpha)\overrightarrow{SB}\\\overrightarrow{ST}=\beta\overrightarrow{SN}+(1-\beta)\overrightarrow{SA}\end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{SM}+(1-\alpha)\overrightarrow{SB}=\beta\overrightarrow{SN}+(1-\beta)\overrightarrow{SA}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha x}{x+1}\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}=\dfrac{\beta y}{y+1}\vec{b}+(1-\beta)\vec{a}$. Vì $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương nên ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha x}{x+1}=1-\beta\\\dfrac{\beta y}{y+1}=1-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{x}{x+y+1}\\\beta=\dfrac{y}{x+y+1}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{ST}=\frac{x}{x+y+1}\vec{a}+\frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\overrightarrow{SE}=\frac{y}{y+z+1}\vec{b}+\frac{z}{y+z+1}\vec{c},\ \overrightarrow{SF}=\frac{z}{z+x+1}\vec{c}+\frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I=BF\cap CT$ và $NF\cap PT=J$ ta được:

$$\overrightarrow{SI}=\frac{1}{x+y+z+1}\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right),\ \overrightarrow{SJ}=\frac{1}{x+y+z+2}\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{SJ}=\dfrac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI}\Rightarrow \overrightarrow{SJ}=(x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy S,I,J thẳng hàng và $\dfrac{SI}{IJ}=x+y+z+1=\dfrac{SM}{MA}+\dfrac{SN}{NB}+\dfrac{SP}{PC}+1$.

Hai đường thẳng vuông góc

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

Định nghĩa:

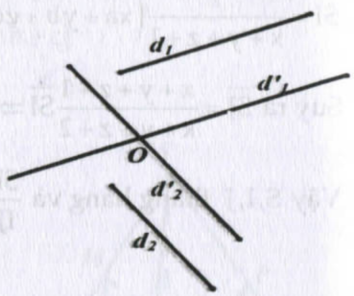
Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách



Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).

Từ O dựng các đường thẳng $d_1^{'},d_2^{'}$ lần lượt song song (có thể trùng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng $d_1^{'},d_2^{'}$ chính là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí Côsin trong tam giác

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1,d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 xác định bởi $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

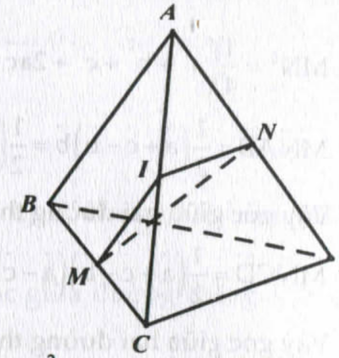
Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2},\left|\overrightarrow{u_1}\right|,\left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB=CD=a, MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải

Cách 1.



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có

$$\begin{cases} IM\ //\ AB \\ IN\ //\ CD \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)$$

Đặt $\widehat{MIN}=\alpha$. Xét tam giác IMN có:

$$IM=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}, IN=\frac{CD}{2}=\frac{a}{2}, MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Theo định lí côsin, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM.IN}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}=-\frac{1}{2}<0$$

$\Rightarrow \widehat{MIN}=120^0$ suy ra $\left(\widehat{AB,CD}\right)=06^0$.

Cách 2. $\cos\left(AB,CD\right)=\cos\left(IM,IN\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

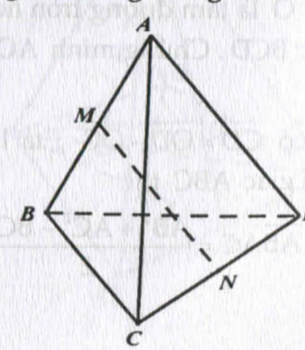
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IM^2+IN^2-2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2}=-\frac{a^2}{8}$$

$$\cos\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left|\cos\left(\widehat{IM,IN}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\left(\widehat{AB,CD}\right)=60^0$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng AB,BC và CD.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

Khi đó, ta có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=m$

và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\right)=60^0$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=\dfrac{m}{2}$.

Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)$

$MN^2=\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{c}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}.\vec{c}\right)=\frac{m^2}{2}\Rightarrow MN=\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}-\vec{b}^2\right)=0$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}^2+\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}-\vec{c}^2+\vec{b}\vec{c}\right)=0$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(-\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{m^2}{2}\Rightarrow\cos\left(\widehat{MN,BC}\right)=\frac{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\frac{m^2}{2}}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45^0.

Bài toán 02: DÙNG TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

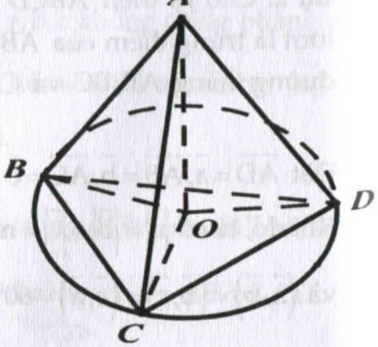
Phương pháp:

Để chứng minh $d_1\perp d_2$ ta có thể thực hiện theo các cách sau:

- Chứng minh $d_1\perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}=0$ trong đó $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của d_1 và d_2.
- Sử dụng tính chất $\begin{cases}b\,//\,c\\a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp b$.
- Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1, d_2 và tính trực tiếp góc đó.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn noại tiếp tam giác BCD. Chứng minh $AO\perp CD$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$, ta lưu ý trong tam giác ABC thì:

$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

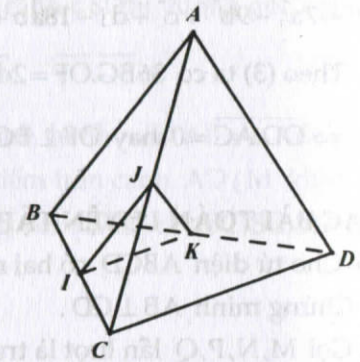
suy ra $\overrightarrow{AO}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AO}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)=-\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}$

$=-\frac{OA^2+OD^2-CD^2}{2}+\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2}=0$

(Vì $AC=AD=a, OD=OC=R$)

Vậy $AO\perp CD$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD có $CD=\frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Cho biết $JK=\frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.



Lời giải

Ta có $IJ=\frac{1}{2}AB$, $IK=\frac{1}{2}CD=\frac{2}{3}AB$

$IJ^2+IK^2=\frac{1}{4}AB^2+\frac{4}{9}AB^2=\frac{25}{36}AB^2\quad(1)$

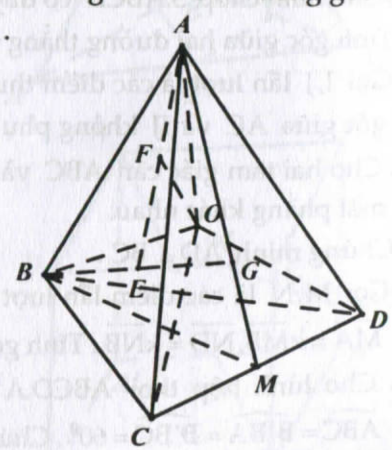
Mà $JK=\frac{5}{6}AB\Rightarrow JK^2=\frac{25}{36}AB^2\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IJ^2+IK^2=JK^2\Rightarrow JI\perp IK$.

Mặt khác ta có $IJ\,//\,AB, IK\,//\,CD\Rightarrow AB\perp CD$.

Tương tự $\begin{cases}IJ\,//\,AB\\AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow IJ\perp CD$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=AD$. Gọi O là điểm thỏa mãn $OA=OB=OC=OD$ và G là trọng tâm của tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE. Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.



Lời giải

Đặt $OA=OB=OC=OD=R\,(1)$ và

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}, \overrightarrow{OD}=\vec{d}$.

Ta có $AB=AC=AD$ nên:

$\Delta AOB=\Delta AOC=\Delta AOD\,(c-c-c)$

Suy ra $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}=\widehat{AOD}\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{d}\quad(3)$.

Gọi M là trung điểm của CD và do $AG = 2GM$ nên

$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b} \quad (4)$$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AE, BG ta có

$$12\overrightarrow{OF} = 6\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG}$$

$$= 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 7\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = \left(7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)\left(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

$$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 18\vec{a}\vec{b} + 8\vec{a}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{d} + 2\vec{c}\vec{d}.$$

Theo (3) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 2\vec{d}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}$ suy ra $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$ hay $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

16. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Chứng minh $AB \perp CD$.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA.

Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.

17. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x\left(0 \le x \le a\right)$. Chứng minh

a) $AC' \perp B'D'$ b) $AC' \perp MN$.

18. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \,//\, BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

20. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh $AD \perp BC$.

b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

21. Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$. Chứng minh $AC \perp B'D'$.

22. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

23. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC.

a) Chứng minh $MN \perp RP, MN \perp RQ$.

b) Chứng minh $AB \perp CD$.

24. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

a) Chứng minh các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

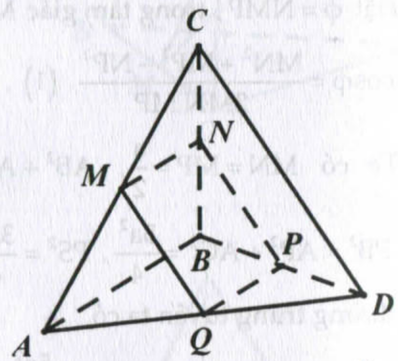
25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB vuông cân tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính diện tích của hình MNPQ.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

16. a) Đặt $AB = AD = AC = a$



Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0$

$= a.a.\dfrac{1}{2} - a.a.\dfrac{1}{2} = 0$

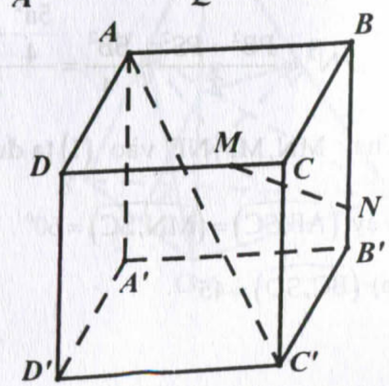
Vậy $AB \perp CD$.

b) Ta có $MN \,//\, PQ \,//\, AB$ và $MN = PQ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

nên tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ NP \,//\, CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$, do đó

MNPQ là hình chữ nhật.



17. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec{c}-\vec{b}$ nên $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

$$=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{c}^2-\vec{b}^2=a^2-a^2=0$$

$\Rightarrow AC'\perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)$

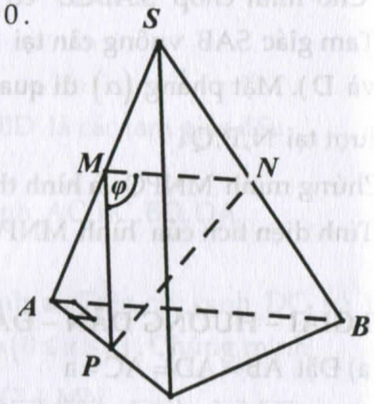
$$=\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)[\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}]$

$$=\frac{x}{a}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}^2-\vec{c}^2=x.a+\left(1-\frac{x}{a}\right)a^2-a^2=0.$$

Vậy $AC'\perp MN$.

18. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SB,AC, khi đó $MN\,//\,AB$ nên $\left(AB,SC\right)=\left(MN,SC\right)$.



Đặt $\phi=\widehat{NMP}$, trong tam giác MNP có

$$\cos\phi=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN.MP}\quad(1).$$

Ta có $MN=MP=\frac{a}{2}$, $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy $PB^2=AP^2+AC^2=\frac{5a^2}{4}$, $PS^2=\frac{3a^2}{4}$. Trong tam giác PBS theo công thức tính đường trung tuyến ta có

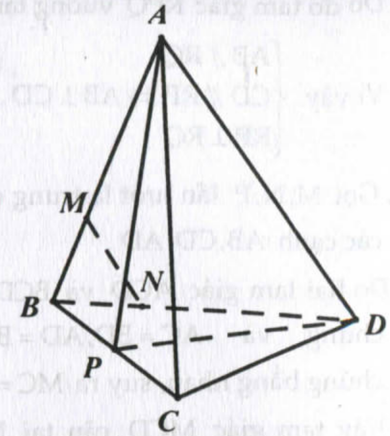
$$PN^2=\frac{PB^2+PS^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN,MP,NP vào (1) ta được $\cos\phi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\phi=120^0$.

Vậy $\left(AB,SC\right)=\left(MN,SC\right)=60^0$.

19. a) $\left(\widehat{BC,SD}\right)=45^0$ b) $\left(\widehat{IJ,AC}\right)=90^0$.

20. a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác ABC và DBC cân nên $\begin{cases}AP\perp BC\\DP\perp BC\end{cases}$.



Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}\right)=0$

Vậy $BC\perp AD$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow\frac{MA}{MB}=|k|$, $\overrightarrow{ND}=k\overrightarrow{NB}$

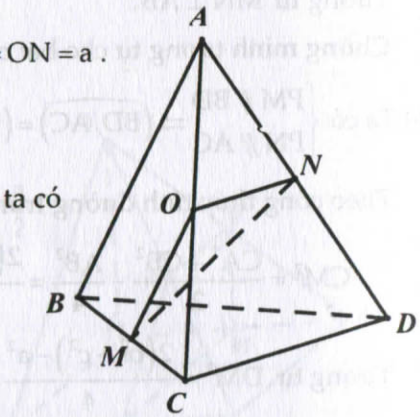
$\Rightarrow\frac{ND}{NB}=|k|\Rightarrow\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NB}$

Suy ra $MN\,//\,AD\Rightarrow\left(\widehat{MN,BC}\right)=\left(\widehat{AD,BC}\right)=90^0$ (Theo câu a)

21. HS tự giải.

22. Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM=ON=a$.

$\begin{cases}OM\,//\,AB\\ON\,//\,CD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{OM,ON}\right)$



Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

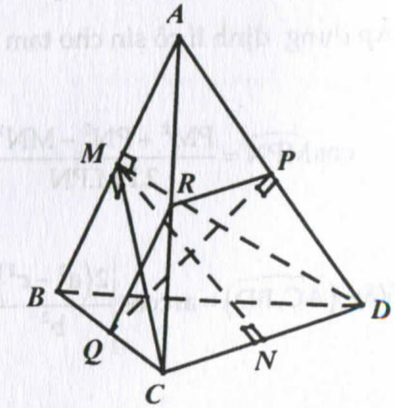
$$\cos\widehat{MON}=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}$$

$$=\frac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $\left(\widehat{AB,CD}\right)=60^0$.

23. a) Ta có $MC=MD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.

Lại có $RP\,//\,CD\Rightarrow MN\perp RQ$.



b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

Trong tam giác vuông PDQ ta có

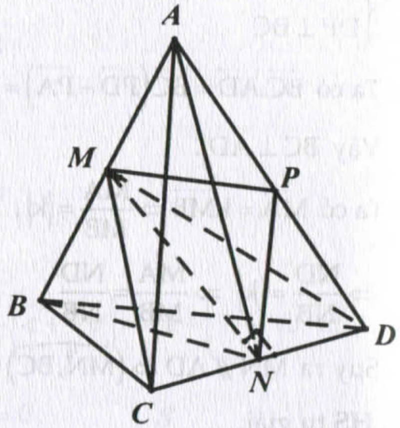
$$QP^2=QD^2-DP^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

Ta có: $RQ^2+RP^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2=QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP \perp RQ$.

Vì vậy $\begin{cases} AB \,//\, RQ \\ CD \,//\, RP \\ RP \perp RQ \end{cases} \Rightarrow AB \perp CD$.

24. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD.



a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC = BD, AD = BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC = MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN \perp CD$.

Tương tự $MN \perp AB$.

Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại.

b) Ta có $\begin{cases} PM \,//\, BD \\ PN \,//\, AC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{BD, AC}) = (\widehat{PM, PN})$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có:

$$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Tương tự $DM^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, nên:

$$MN^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos\widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2.PM.PN} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{2(a^2 - c^2)}{b^2}$$

Vậy $(\widehat{AC, BD}) = \arccos\left|\dfrac{2(a^2 - c^2)}{b^2}\right|$.

25. a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (SAB) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AB$.

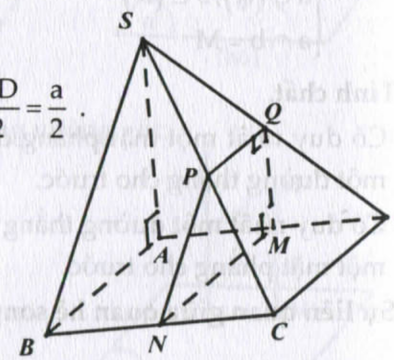
Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, SB$

$\begin{cases} (\alpha) \,//\, (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \\ (\alpha) \cap (SAD) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, SA$

Dễ thấy $MN \,//\, PQ \,//\, AB \,//\, CD$ nên MNPQ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ MQ \,//\, SA \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy MNPQ là hình thang vuông.



b) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$, $PQ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

$= \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^2}{8}$.

Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

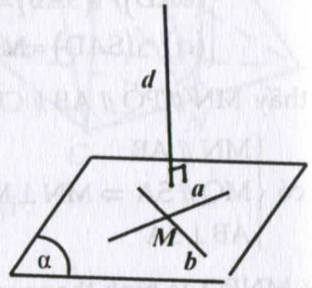
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Vậy $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Định lí: Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α)

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha).$$



3. Tính chất.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Sự liên quan giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.

1. $\begin{cases} a \,//\, b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b$ (h1)

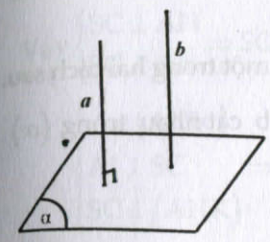
2. $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b$ (h2)

3. $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$ (h3)

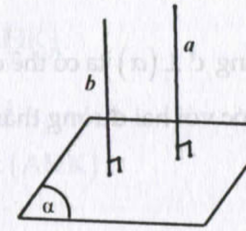
4. $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta)$ (h4)

5. $\begin{cases} a \,//\, (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$ (h5)

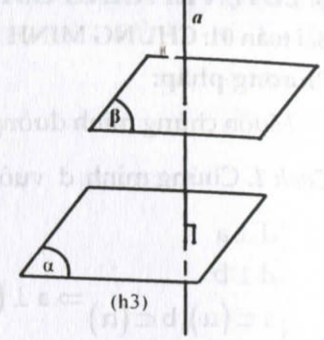
6. $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (\alpha)$ (h6)



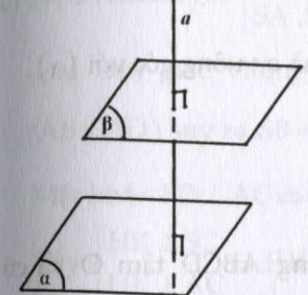
(h1)



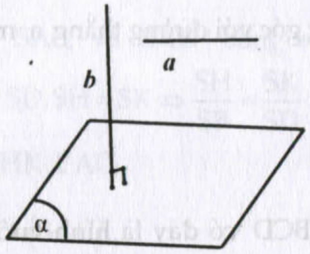
(h2)



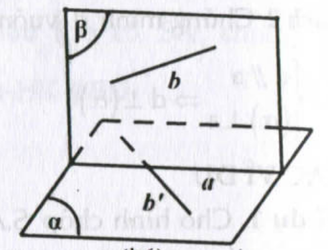
(h3)



(h4)



(h5)

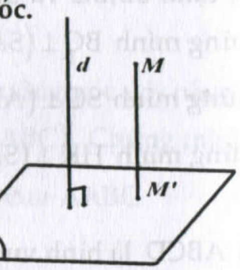


(h6)

5. Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc.

5.1. Định nghĩa: Cho đường thẳng $d \perp (\alpha)$.

Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).



5.2. Định lí ba đường vuông góc.

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu của b trên (α). Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.

5.3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

- Nếu d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90^0.
- Nếu d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d với hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Muốn chứng minh đường thẳng $d \perp (\alpha)$ ta có thể dùng một trong hai cách sau.

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$

Cách 2. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d \,//\, a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$

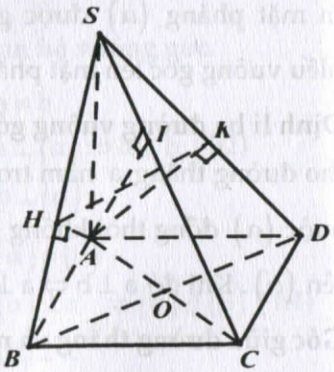
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.



Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Vậy $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

$\begin{cases} A \in (AHK) \\ AI \perp SC \\ SC \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \subset (AHK)$.

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau (do có SA chung và $AB = AD$) suy ra $SB = SD, SH = SK \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD$

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow HK \perp AC$.

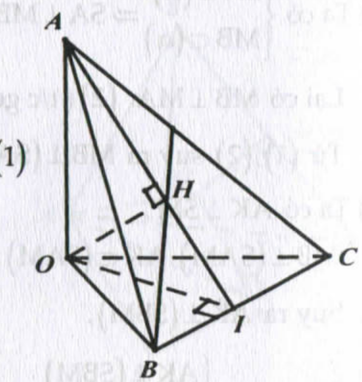
Vậy $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

$\begin{cases} AI \subset (SAC) \\ HK \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

a) $BC \perp (OAH)$ b) H là trực tâm của ΔABC

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.



Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$

Lại có $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \quad (3)$

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $AC\perp(OBH)\Rightarrow AC\perp BH$ (5)

Lại có $BC\perp(OAH)\Rightarrow AH\perp BC$ (6).

Từ (5),(6) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi $I=AH\cap BC$, do $\begin{cases}OI\subset(OAH)\\BC\perp(OAH)\end{cases}\Rightarrow BC\perp OI$

Ta giác OAI vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}$ (*).

Tương tự cho tam giác OBC ta có $\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ thay vào (*) thu được

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S\neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A, B).

a) Chứng minh $MB\perp(SAM)$.

b) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK\perp(SBM)$, $SB\perp(AHK)$

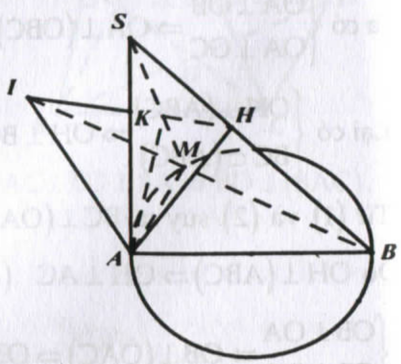
c) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}SA\perp(\alpha)\\MB\subset(\alpha)\end{cases}\Rightarrow SA\perp MB$ (1)

Lại có $MB\perp MA$ (2) (t/c góc chắn nửa đường tròn)

Từ (1),(2) suy ra $MB\perp(SAM)$.



b) Ta có $AK\perp SM$,

$MB\perp(SAM), AK\subset(SAM)\Rightarrow MB\perp AK$.

Suy ra $AK\perp(SBM)$.

Tương tự $\begin{cases}AK\perp(SBM)\\SB\subset(SBM)\end{cases}\Rightarrow AK\perp SB$,

lại có $AH\perp SB$ suy ra $SB\perp(AHK)$.

c) Ta có $\begin{cases}AI\subset(AHK)\\SB\perp(AHK)\end{cases}\Rightarrow AI\perp SB$ (3)

$\begin{cases}AI\subset(\alpha)\\SA\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow AI\perp SA$ (4). Từ (3),(4) suy ra $AI\perp(SAB)\Rightarrow AI\perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

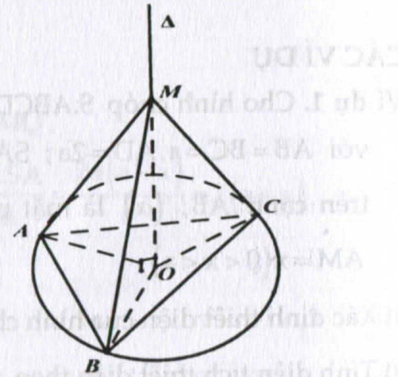
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có góc $A=120^0$, cạnh $BC=a\sqrt{3}$. Lấy điểm $S\notin(ABC)$ sao cho $SA=a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Chứng minh $AO\perp(SBC)$.

Lời giải

Để giải bài toán này, trước tiên chúng ta chứng minh một kết quả sau:

Trong không gian tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó (đường thẳng này được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó).

Chứng minh: Gọi M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và O là hình chiếu của M trên (ABC).

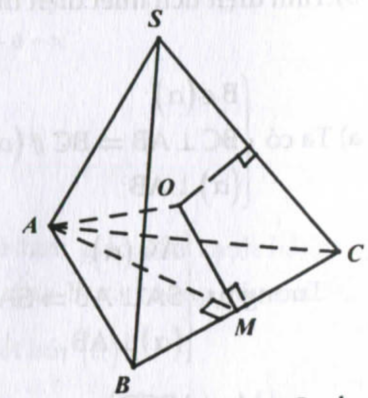


Các tam giác vuông MOA, MOB, MOC có MO chung.

Vậy $MA=MB=MC\Leftrightarrow OA=OB=OC\Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Quay lại bài toán



Gọi M là trung điểm của BC, ta có ΔABC cân tại $A\Rightarrow AM\perp BC$.

$AB=\frac{BM}{\sin 60^0}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=a$. Mặt khác $AC=a$

suy ra $AS=AB=AC=a$, điểm A cách đều ba đỉnh S, B, C của ΔSBC, do đó gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC thì AO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC suy ra $AO\perp(SBC)$.

Bài toán 02: THIẾT DIỆN ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

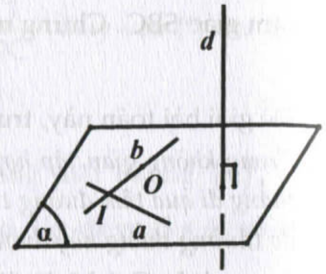
Phương pháp:

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song như đã biết.

Cách 2. Ta dựng mặt phẳng (α) như sau:

Dựng hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.



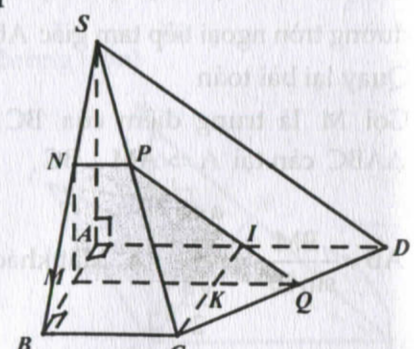
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a, AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Đặt $AM = x\,(0 < x < a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} B \notin (\alpha) \\ BC \perp AB \\ (\alpha) \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \,//\, (\alpha)$.

Tương tự $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ SA \perp AB \\ (\alpha) \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, (\alpha)$.

Do $\begin{cases} M \in (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \\ BC \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ \,//\, BC, Q \in CD$.

Tương tự $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \,//\, SA, N \in SB$.

$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP \,//\, BC, P \in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $\begin{cases} MQ \,//\, BC \\ NP \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, NP$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} MQ \,//\, AB \\ MN \,//\, SA \Rightarrow MQ \perp MN \\ SA \perp AB \end{cases}$ suy ra thiết diện là một hình thang vuông tại M và N.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN$$

Gọi I là trung điểm của AD và $K = CI \cap MQ$.

Do $MN \,//\, SA$ nên $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \dfrac{BM.SA}{BA} = \dfrac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$\dfrac{NP}{BC} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \dfrac{BC.AM}{AB} = \dfrac{a.x}{a} = x$.

Xét trong hình thang $ABCD$ ta có:

$\dfrac{KQ}{ID} = \dfrac{CK}{CI} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow KC = \dfrac{ID.BM}{BA} = \dfrac{a(a-x)}{a} = a - x$

$MQ = MK + KQ = a + (a - x) = 2a - x$.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a - x + x)2(a-x) = 2a(a-x).$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

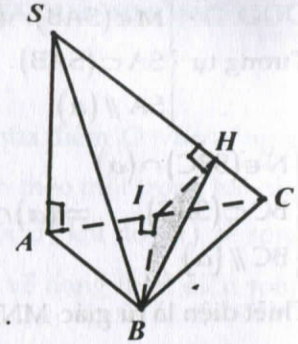
a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích của thiết diện này.

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của AC, dựng $IH \perp SC, H \in SC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)P$.



Mặt khác $IH \perp SC$ nên $(BIH) \perp SC$.

Vậy (BIH) chính là mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với SC.

Thiết diện là tam giác IBH.

b) Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow IB \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

$BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh a).

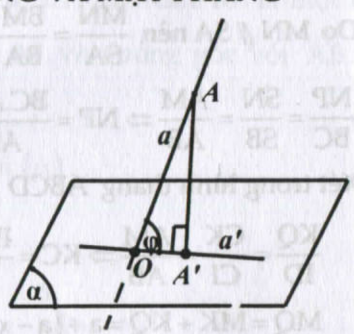
Hai tam giác CHI và CAS có góc C chung nên chúng đồng dạng. Từ đó suy ra $\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$

Vậy $S_{BIH} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Bài toán 03: TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:



- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $\widehat{AOA'} = \phi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).

Lưu ý:

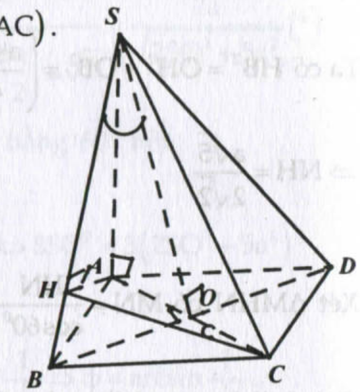
- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' \parallel b$.
- Để tính góc ϕ ta sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc ϕ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\phi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính

a) Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC).

b) Góc giữa AC với mặt phẳng (SBC).



Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$ suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $\widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{BSO} = \varphi$.

$$\sin\phi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \phi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

b) Trong (SAB) gọi H là hình chiếu của A trên SB

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

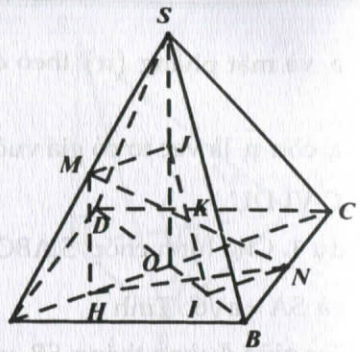
Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$, hay CH là hình chiếu của CA trên (SBC). Vậy $\widehat{(AC,(SBC))} = \widehat{ACH} = \alpha$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{a\sqrt{\frac{6}{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$; M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Biết góc giữa MN với (ABCD) bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải



Cách 1. Kẻ $MH // SO, H \in OA$.

Do $\begin{cases} MH // SO \\ SO \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow NH$ là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$ $\Rightarrow \widehat{MNH}$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.

Ta có $HB^2 = OH^2 + OB^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow NH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Xét ΔMHN có $MN = \dfrac{HN}{\cos 60^0} = \dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $MH = NH \tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì $MJ // IN$ và $MJ = IN$. Gọi $K = IJ \cap MN \Rightarrow JK = \dfrac{1}{2}IJ$ và $MJ \perp (SBD) \Rightarrow \widehat{MKJ}$ là góc giữa MN và (SBD).

Ta có $IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \dfrac{15a^2}{8} + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 2a^2$.

$\Rightarrow IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\widehat{MKJ} = \phi \Rightarrow \tan\phi = \dfrac{MJ}{JK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\phi = \arctan\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2 = \dfrac{1}{4}\left(SO^2 + AC^2 + OB^2\right) = \dfrac{1}{4}\left(SO^2 + \dfrac{5a^2}{2}\right) \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \dfrac{5a^2}{2}}$.

Ta có ϕ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\phi = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ nên chọn $\vec{n} = \overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\phi = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}} (*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 nên:

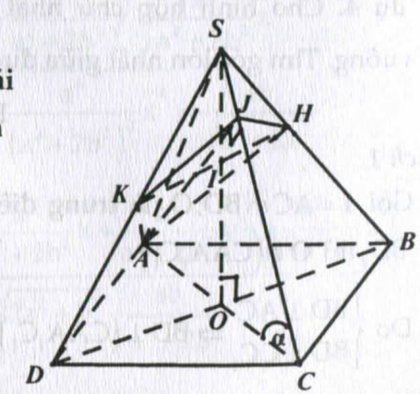
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8SO^2 = 3\left(2SO^2 + 5a^2\right)$$

$\Leftrightarrow 2SO^2 = 15a^2$. Thay vào (*) suy ra $\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \phi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\phi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td} = \dfrac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K.

Do $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

mà $(\alpha) \perp SC \Rightarrow (\alpha) // BD$.

Vậy $\begin{cases} BD \subset (SBD) \\ BD // (\alpha) \\ (SBD) \cap (\alpha) = HK \end{cases} \Rightarrow KH // BD \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AJ$

Do đó $S_{AHJK} = \frac{1}{2}HK.AI$.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCO} = \phi$.

Ta có $AJ = AC\sin\phi = a\sqrt{2}\sin\phi$; $SO = OC\tan\phi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\phi$.

$\Delta SOC \sim \Delta SJI \Rightarrow \widehat{SIJ} = \widehat{SCO} = \phi \Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{SIJ} = \phi$.

Từ đó ta có $OI = OA\cot\phi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\phi$.

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SI}{SO} = 1 - \frac{OI}{SO} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\phi}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\phi} = 1 - \cot^2\phi$$

$\Rightarrow KH = BD(1-\cot^2\phi) = a\sqrt{2}(1-\cot^2\phi)$.

Vậy $S_{AHJK} = \frac{1}{2}HK.AI = a\sqrt{2}\sin\phi.a\sqrt{2}(1-\cot^2\phi) = 2a^2\sin\phi(1-\cot^2\phi)$

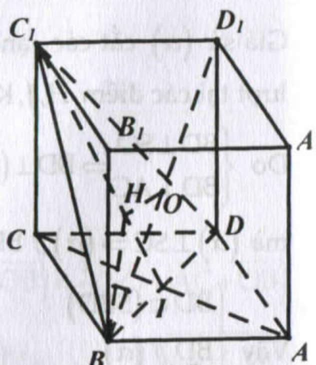
Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\phi(1-\cot^2\phi) = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow 4\sin^2\phi - \sin\phi - 2 = 0$

$$\sin\phi = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \text{ (do } 0<\phi<\frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin\phi>0\text{)} \Leftrightarrow \phi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\phi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải



Cách 1.

Gọi $I = AC \cap BD, O$ là trung điểm của BD_1 thì $O \in (CAA_1C_1)$.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CAA_1C_1)$

hạ $OH \perp IC_1, H \in IC_1$ thì $OH \perp (BDC_1)$

Vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là góc $\widehat{OBH} = \alpha$.

Đặt $AB = AD = a, AA_1 = b$ thì $BD_1 = \sqrt{AB^2+AB^2+DD_1^2} = \sqrt{2a^2+b^2}$

$\Rightarrow OB = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

Dễ thấy $HO = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+5}}$

Do $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} \ge 2 \Rightarrow \sin\alpha \le \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \le \arcsin\frac{1}{3}$ (Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

Vậy $\max\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ khi $a = b$.

Cách 2. $\overrightarrow{CB} = \vec{x}, \overrightarrow{CD} = \vec{y}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = a, |\vec{z}| = b$

$\overrightarrow{BD_1} = -\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$, $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2} = \sqrt{2a^2+b^2}$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH \perp C_1I$ và $CH \perp BD$

$\Rightarrow CH \perp (BDC_1)$.

Ta có $\frac{C_1H}{IH} = \frac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1} = \frac{CC_1^2}{CI^2} = \frac{b^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2b^2}{a^2}$ nên

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1} + \frac{\frac{2b^2}{a^2}}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI} = \frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}.2\overrightarrow{CI}$$

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CI} = \frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y} + \frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}$$

$$|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2 + \frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{y}^2 + \frac{a^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

$$\text{Vậy } \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}|}{|\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{BD_1}|} = \frac{\left|(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})\left(\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y} + \frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}.$$

Theo BĐT AGM ta có $\dfrac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^4}\,3\sqrt[3]{b^2a^4}}} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha \le \arcsin\dfrac{1}{3} \Rightarrow \max\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$ khi $a = b$.

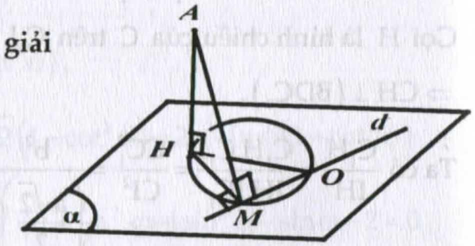
Bài toán 04: TÌM TẬP HỢP HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG HAY MỘT MẶT PHẲNG DI ĐỘNG.

Phương pháp:

Để giải các bài toán dạng này trước tiên ta cần nắm chắc lời giải của hai bài toán gốc sau:

Bài toán 1: Trong không gian cho (α) và hai điểm cố định A và O với $A \notin (\alpha), O \in (\alpha)$, d là một đường thẳng di động trong (α) và luôn đi qua O. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d. Tìm tập hợp điểm H khi d di động.

Lời giải



Dựng $AH \perp (\alpha)$ suy ra H cố định.

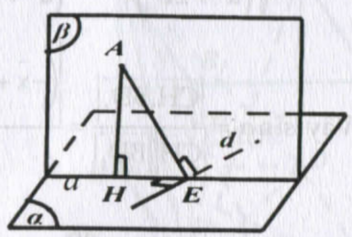
Ta có $\begin{cases} d \perp AH \\ d \perp AM \end{cases} \Rightarrow d \perp (AMH)$

$\Rightarrow d \perp HM$.

Trong mặt phẳng (α) điểm M nhìn đoạn OH cố định dưới một góc vuông suy ra M thuộc đường tròn đường kính OH trong (α).

Bài toán 2: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A cố định (α) là mặt phẳng di động nhưng luôn chứa d. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên (α) khi (α) di động.

Lời giải

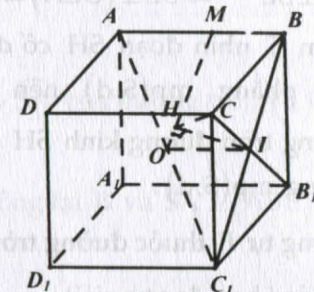


Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d và $a = (\alpha) \cap (\beta)$. Trong (β) gọi H là hình chiếu của A trên a và $E = d \cap (\beta)$. Ta có A, E cố định và trong mặt phẳng (β) điểm H nhìn đoạn AE dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các mặt đều là hình vuông với O là tâm của hình hộp và M là một điểm chuyển động trên đoạn AB. Gọi H là hình chiếu của C xuống đường thẳng OM. Tìm quỹ tích điểm H.

Lời giải



Phần thuận.

Gọi $I = C_1B \cap BC_1$, do $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB_1 \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AB \perp CI$

mà $CI \perp BC_1 \Rightarrow CI \perp (ABC_1D_1)$

$\Rightarrow CI \perp OH$, mặt khác $OH \perp CH$ nên $OH \perp (CHI) \Rightarrow OH \perp IH$.

Điểm H nhìn đoạn thẳng OI cố định dưới một góc vuông đồng thời $H \in OM \subset (ABC_1D_1)$ cố định nên H thuộc đường tròn đường kính OI trong (ABC_1D_1).

Giới hạn.

Khi $M \equiv A$ thì $H \equiv H_1$ trong đó H_1 là hình chiếu của C trên AC_1.

Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv H_2$ trong đó H_2 là hình chiếu của C trên D_1B.

Vậy H chạy trên cung $\overset{\frown}{H_1H_2}$

Phần đảo.

Giả sử H' là một điểm bất kì trên cung H_1H_2, ta chứng minh tồn tại điểm M' trên đoạn AB sao cho H' là hình chiếu của C trên OM'.

Gọi $M' = OH' \cap AB$. Dễ thấy $IC \perp (ABC_1) \Rightarrow IC \perp OM'$

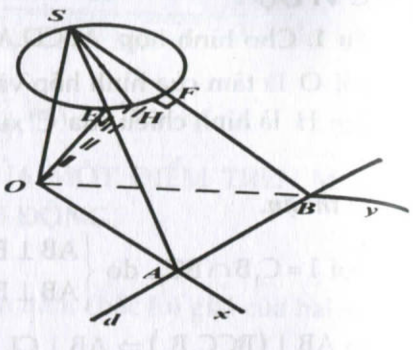
Vậy $\begin{cases} OM' \perp IC \\ OM' \perp IH' \end{cases} \Rightarrow OM' \perp (ICH') \Rightarrow CH' \perp OM'$, hay H' là hình chiếu của C trên OM'.

Kết luận: Tập hợp điểm H là cung $\overset{\frown}{H_1H_2}$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho một điểm O cố định, một đường thẳng d cố định không đi qua O, một góc vuông xOy quay xung quanh điểm O. Các tia Ox, Oy cắt d theo thứ tự tại A, B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) và đi qua O, lấy một điểm S cố định. Dựng $OE \perp SA, OF \perp SB$. Tìm quỹ tích các điểm E và F khi góc vuông xOy quay xung quanh điểm O.

Lời giải

Dựng $OH \perp (SAB)$ thì H cố định. Do $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH \perp SE$, mặt khác $OE \perp SE \quad \Rightarrow SE \perp (OEH) \Rightarrow SE \perp EH$.



Điểm E nhìn đoạn SH cố định trong mặt phẳng $mp(S,d)$ nên E thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

Tương tự F thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

Phần đảo.(bạn đọc tự giải)

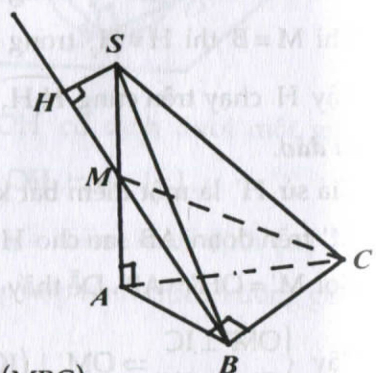
Vậy tập hợp các điểm E và F là đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$ bỏ đi hai điểm S và H.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên (MBC) khi M di động trên đoạn SA.

Lời giải

Phần thuận.



Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $SH \perp MB, H \in MB$, khi đó ta có

$\begin{cases} SH \subset (SAB) \\ BC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (MBC)$

Vậy H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (MBC).

Trong mặt phẳng (SAB) điểm H nhìn đoạn SB dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn (C) đường kính SB nằm trong (SAB).

Giới hạn.

Khi $M \equiv S \Rightarrow H \equiv S$.

Khi $M \equiv A \Rightarrow H \equiv A$.

Vậy M di động trên đoạn SA thì H di động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{SA}$ của đường tròn (C).

Phần đảo.

Gọi H' là một điểm bất kì trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi $M' = BH' \cap SA$. Ta có $\begin{cases} SH' \perp BM' \\ SH' \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH' \perp (M'BC)$ hay H' là hình chiếu của S trên (MBC).

Kết luận: Tập hợp các điểm H là cung nhỏ $\overset{\frown}{SA}$ của đường tròn (C).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

26. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$.   b) $AC \perp SD$.

28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$.

Chứng minh:

a) H là trực tâm của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác nhọn.

c) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2.$$

29. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng:

a) ΔACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Chứng minh $IK \perp (SCD)$ và tính IK.

31. Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA, DB, DC với mặt phẳng (ABC).

Chứng minh $(2 + \cot^2\alpha)(2 + \cot^2\beta)(2 + \cot^2\gamma) \geq 64$.

32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh:

a) $AC \perp (SHK)$ b) $CK \perp SD$.

33. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H,K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH,SK và BC đồng qui. b) $SB \perp (CHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

34. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện ABMC là tam giác vuông.

b) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Chứng minh $AC \perp (BHK)$.

c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động.

d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất.

e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất.

35. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp (ABCD)$. b) $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

36. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$. Tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB,CD lần lượt tại I,J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Gọi K,L là các giao điểm K,L của SB,SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

37. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB

a) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC với (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện.

39. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

40. Cho tam giác ABC vuông tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α,β. Tính góc giữa đường cao CK với (P).

41. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO \perp (ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng (ABCD) và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a) Chứng minh $SO = AH$ và SA khi $HB = \frac{a}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với (ABCD).

42. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng (ABCD) và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

b) Chứng minh $AB = a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

43. Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tứ diện. Gọi A,B,C là ba góc tương ứng của tam giác ABC.

Đặt $\alpha = \widehat{AOH}, \beta = \widehat{BOH}, \gamma = \widehat{COH}$.

Chứng minh: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

44. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BDC}=90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh $\widehat{CDA}=90^0$.

b) $6\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)\geq\left(AB+BC+CA\right)^2$.

45. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

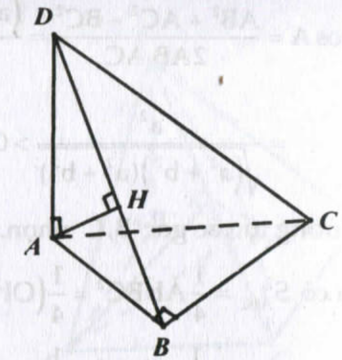
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{MA^2}{OA^2}+\dfrac{MB^2}{OB^2}+\dfrac{MC^2}{OC^2}$.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α,β,γ lần lượt là góc giữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA, OB, OC.

Chứng minh rằng: $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Tìm GTNN của $S=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos^2\gamma}+\dfrac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos^2\beta}$

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

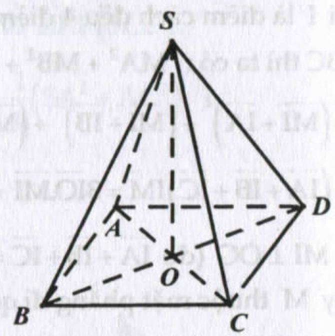


26. a) Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$.

Do đó $\left.\begin{array}{l}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)$

b) Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

Vậy $\left.\begin{array}{l}AH\perp BC\\AH\perp SB\end{array}\right\}\Rightarrow AH\perp SC$.



27. a) Ta có O là trung điểm của AC và $SA=SC\Rightarrow SO\perp AC$.

Tương tự $SO\perp BD$.

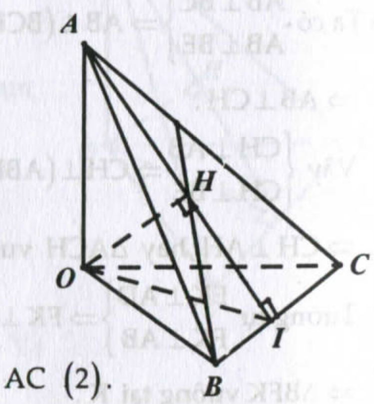
Vậy $\left.\begin{array}{l}SO\perp AC\\SO\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

b) Ta có $AC\perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi).

Lại có $AC\perp SO$ (do $SO\perp(ABCD)$)

Suy ra $AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$.

28.



a) Ta có $\left.\begin{array}{l}OA\perp OB\\OA\perp OC\end{array}\right\}\Rightarrow OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp BC$

Lại có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp BC$

Vậy $\left.\begin{array}{l}BC\perp OA\\BC\perp OH\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(OAH)$

$\Rightarrow BC\perp AH$ (1).

Tương tự $\left.\begin{array}{l}AC\perp OB\\AC\perp OH\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp(OBH)\Rightarrow BH\perp AC$ (2).

Từ (1),(2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt $OA=a, OB=b, OC=c$

Ta có $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{b^2+c^2}$

Tương tự $AC=\sqrt{a^2+c^2}, AB=\sqrt{a^2+b^2}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2\right)}{2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}>0 \text{ suy ra } \widehat{A} \text{ nhọn.}$$

Tương tự các góc B,C nhọn.

c) Ta có $S^2_{ABC}=\frac{1}{4}AI^2BC^2=\frac{1}{4}\left(OI^2+OA^2\right)\left(OB^2+OC^2\right)$

$$=\frac{1}{4}OI^2BC^2+\frac{1}{4}OA^2OB^2+\frac{1}{4}OA^2OC^2=S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}$$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O,A,B,C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có : $MA^2+MB^2+MC^2=3MO^2$

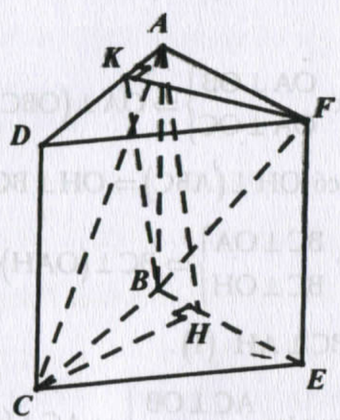
$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO})^2$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{IM}=3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}\overrightarrow{MI}=0$

$\Leftrightarrow MI\perp OG$ (do $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$)

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

29.



a) Ta có $\left.\begin{matrix}AB\perp BC\\AB\perp BE\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp(BCE)$

$\Rightarrow AB\perp CH$.

Vậy $\begin{cases}CH\perp AB\\CH\perp BE\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABEF)$

$\Rightarrow CH\perp AH$, hay ΔACH vuông tại H.

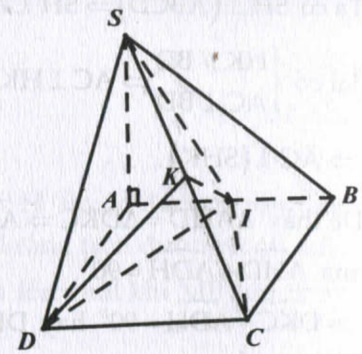
Tương tự $\left.\begin{matrix}FK\perp AD\\FK\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow FK\perp(ABCD)$

$\Rightarrow\Delta BFK$ vuông tại K.

b) Ta có $CH\perp(ABEF)\Rightarrow CH\perp BF$, mặt khác $AC\perp BF\Rightarrow BF\perp(ACH)\Rightarrow BF\perp AH$.

Tương tự $\left.\begin{matrix}AC\perp KF\\AC\perp BF\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp(BKF)\Rightarrow AC\perp BK$.

30. Ta có $IS=\sqrt{AI^2+AS^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$



Tương tự $ID=IC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra

$IS=ID=IC$ nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

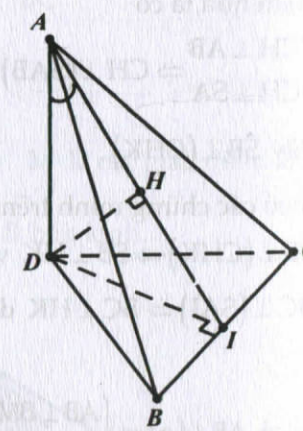
Mặt khác $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$

$\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow\Delta SCD$ vuông tại D, lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó $KI\perp(SCD)$.

Ta có $IK^2=ID^2-DK^2=ID^2-\frac{1}{4}SC^2=ID^2-\frac{1}{4}\left(SA^2+AC^2\right)$

$\frac{5a^2}{4}-\frac{1}{4}\left(a^2+2a^2\right)=\frac{a^2}{2}\Rightarrow IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

31. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)



Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Và $\left(\widehat{DA,(ABC)}\right)=\left(\widehat{DA,AH}\right)=\widehat{DAH}=\alpha$

Đặt $DA=a, DB=b, DC=c$

Gọi $I=AH\cap BC$ thì DI là đường cao của tam giác DBC nên $DI=\frac{DB.DC}{BC}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$\cot^2\alpha=\frac{DA}{DI}=\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2}$

$\Rightarrow 2+\cot^2\alpha=2+\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2}\geq 2+\frac{2a^2}{bc}\geq\frac{4a}{\sqrt{bc}}$ Vậ

y $2+\cot^2\alpha\geq\frac{4a}{\sqrt{bc}}$ (1)

Tương tự $2+\cot^2\beta\geq\frac{4b}{\sqrt{ac}}$ (2) và $2+\cot^2\gamma\geq\frac{4c}{\sqrt{ab}}$ (3)

Nhân theo vế các BĐT (1),(2),(3) ta được

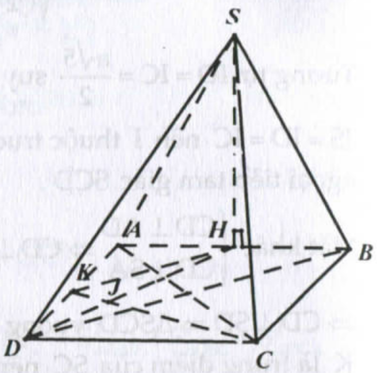
$\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right)\geq 64$ (đpcm)

32.

a) Ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AC$

lại có $\begin{cases}HK // BD\\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow AC\perp HK$

$\Rightarrow AC\perp(SHK)$.



b) Dễ thấy $\Delta AHD=\Delta DKC\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{DKC}$

mà $\widehat{AHD}+\widehat{ADH}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{DKC}+\widehat{ADH}=90^0$ hay $DH\perp CK$, mặt khác ta có

$SH\perp CK\Rightarrow CK\perp(SDH)\Rightarrow CK\perp SD$.

33.

a) Gọi $I=AH\cap BC$, để chứng minh AH, SK và BC đồng qui.

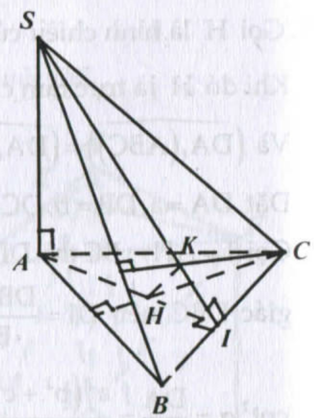
Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do $BC\perp SA$ và $BC\perp AI$.

b) Ta có $SB\perp CK$

thêm nữa ta có

$\begin{cases}CH\perp AB\\ CH\perp SA\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB$

Vậy $SB\perp(CHK)$.



b) Theo các chứng minh trên ta có

$SB\perp(CHK)\Rightarrow SB\perp HK$ và

$BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp HK$ do đó $HK\perp(SBC)$.

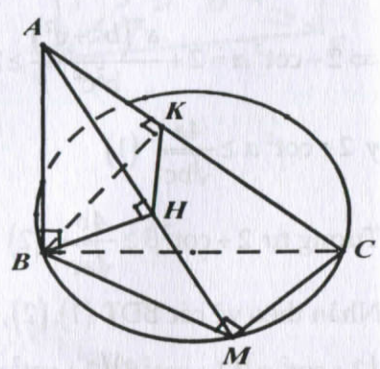
34.

a) Ta có $AB\perp(\alpha)\Rightarrow\begin{cases}AB\perp BM\\ AB\perp BC\end{cases}$ suy ra các tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có

$\begin{cases}MC\perp MB\\ MC\perp AB\end{cases}\Rightarrow MC\perp(ABM)$

$\Rightarrow MC\perp AM$ hay tam giác ACM vuông tại M.



b) Ta có $\begin{cases}BH\perp AM\\ BH\perp MC\end{cases}\Rightarrow BH\perp(ACM)$

$\Rightarrow BH\perp AC$.

Vậy $\left.\begin{matrix}AC\perp BH\\ AC\perp BK\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp(BHK)$.

c) Dễ thấy BK cố định và $\widehat{BHK}=90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK. Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d) $MA^2=AB^2+BM^2$ mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất $\Leftrightarrow BM=BC\Leftrightarrow M\equiv C$.

e) Ta có $S_{BHK}=\frac{1}{2}BH.HK\le\frac{BH^2+HK^2}{4}=\frac{BK^2}{4}$ không đổi nên $\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}$

$\Leftrightarrow BH=HK$, lúc này ΔHBK vuông cân tại H nên $BH=\frac{BK}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2};\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}$

nên $2\left(\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}\right)=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BA^2}\Leftrightarrow\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{2}{BC^2}$

$\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Vậy $\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}\Leftrightarrow$ M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính.

35.

a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên $SH\perp AB$

Lại có

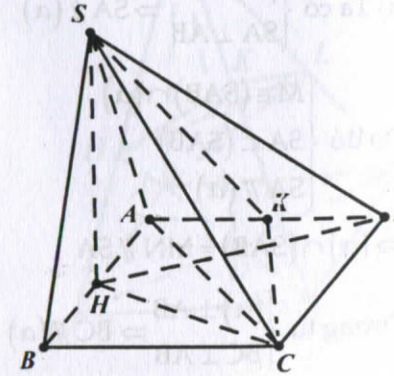
$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2},SC=a\sqrt{2}$,

$HC=\sqrt{DH^2+DC^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó

$HC^2+HS^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{5a^2}{4}=2a^2=SC^2$

$\Rightarrow\Delta HSC$ vuông tại $H\Rightarrow SH\perp HC$



Vậy $\begin{cases} SH\perp HC\\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

b) Ta có $AC\perp HK$ và $AC\perp SH\Rightarrow AC\perp(SHK)$

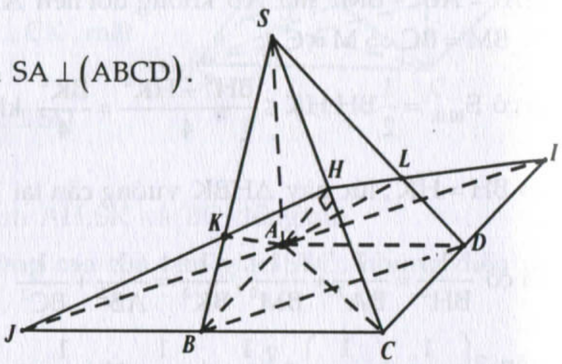
$\Rightarrow AC\perp SK$.

Tương tự $CK\perp HD$ (như bài 32) và $CK\perp SH\Rightarrow CK\perp(SDH)\Rightarrow CK\perp SD$.

36.

a) ΔSBC vuông tại $B\Rightarrow BC\perp SB$ mà $BC\perp AD\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp SA$.



Tương tự ta có $SA\perp CD$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Ta có

$SC=\sqrt{DS^2+DC^2}=a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SB=\sqrt{SC^2-BC^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Vậy $SA=a$.

b) Do $\begin{cases} IJ\perp AC\\ IJ\perp SA\end{cases}\Rightarrow IJ\perp(SAC)\Rightarrow IJ\perp SC$

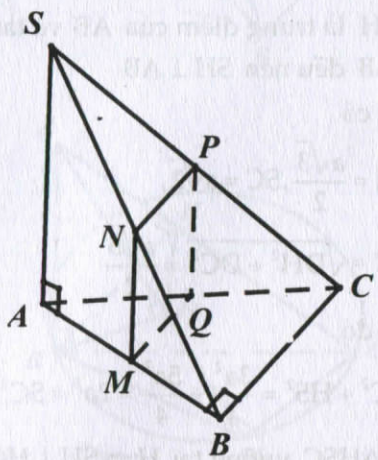
Lại có $AH\perp SC\Rightarrow(HIJ)\perp SC\Rightarrow AK\perp SC$ (1)

Dễ thấy $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AK$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $AK\perp(SBC)$.

Lập luận tương tự ta có $AL\perp(SCD)$.

37. a) Ta có $\begin{cases}(\alpha)\perp AB\\ SA\perp AB\end{cases}\Rightarrow SA\,//\,(\alpha)$



Do đó $\begin{cases} M\in(SAB)\cap(\alpha)\\ SA\subset(SAB)\\ SA\,//\,(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MN\,//\,SA$

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\perp AB\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\,//\,(\alpha)$

$\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(ABC)\\ BC\subset(ABC)\\ BC\,//\,(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MQ\,//\,BC, Q\in AC$

$\begin{cases} N\in(SBC)\cap(\alpha)\\ BC\subset(SBC)\\ BC\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=NP\,//\,BC, P\in SC$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

b) Ta có $MN\,//\,SA, PQ\,//\,SA\Rightarrow MN\,//\,PQ$ và $MQ\,//\,BC, NP\,//\,BC\Rightarrow MQ\,//\,NP$ nên MNPQ là hình bình hành.

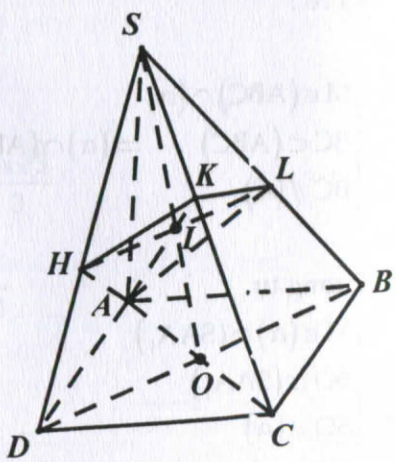
Mặt khác $\begin{cases} MN\,//\,SA\\ NP\,//\,BC\\ SA\perp BC\end{cases}\Rightarrow MN\perp NP$. Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MQ=AM=x$, $\dfrac{MN}{SA}=\dfrac{MB}{AB}\Rightarrow MN=\dfrac{MB.SA}{AB}=\dfrac{(a-x)a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ}=MN.MQ=\sqrt{3}(a-x)x=\sqrt{3}[\dfrac{a^2}{4}-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2]\le\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x=\dfrac{a}{2}$.

38. a) Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì $K\in(\alpha)$.Trong (SAC) gọi $I=SO\cap AK$.



Ta có $\left.\begin{matrix} BD\perp SA\\ BD\perp AC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

$\Rightarrow BD\perp SC$, mặt khác $(\alpha)\perp SC$ nên $BD\,//\,(\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} I\in(\alpha)\cap(SBD)\\ BD\subset(SBD)\\ BD\,//\,(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=HL\,//\,BD, H\in SD, L\in SB$

Thiết diện là tứ giác AHKL.

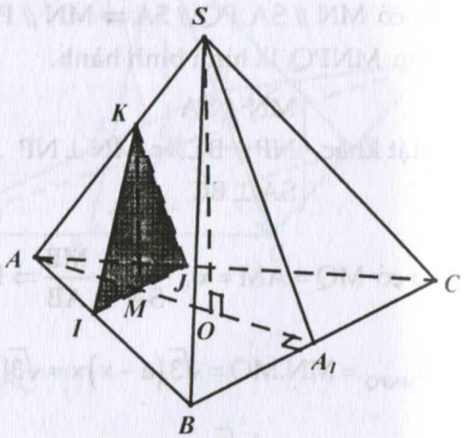
b) Do $\begin{cases} HL // BD \\ BD \perp AK \end{cases} \Rightarrow HL \perp AK \Rightarrow S_{AHKL} = \frac{1}{2}AH.KL$

Ta có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A, mà $AK \perp SC$ nên K là trung điểm của $SC \Rightarrow AK = \frac{SC}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

$HL // BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HL = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Vậy $S_{AHKL} = \frac{1}{2}a.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

39. a) Vì S.ABC là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm tam giác ABC).Do đó $SO \perp AA_1$ mà $(\alpha) // AA_1 \Rightarrow SO // (\alpha)$.



Tương tự ta cũng có $BC // (\alpha)$

Trường hợp 1. $x = 0$ thì thiết diện là điểm A.

Trường hợp 2. $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì M thuộc đoạn $AO(M \ne A)$.

Ta có :

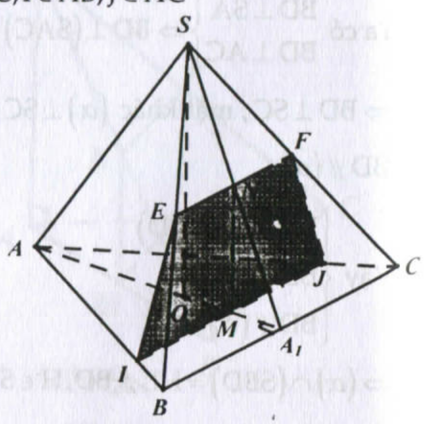
$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ // BC, I \in AB, J \in AC$$

Tương tự

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO // (\alpha) \end{cases}$$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MK // SO, K \in SA$

Thiết diện là tam giác KIJ .



Trường hợp 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó M thuộc đoạn $OA(M \ne 0; M \ne A)$

Tương tự như trường hợp trên ta có:

$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC // (\alpha) \end{cases}$$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ // BC$,
$I \in AB, J \in AC$

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MN // SO, N \in SA_1.$$

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ BC // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = EF // IJ, N \in EF$$

Thiết diện là tứ giác IJEF .

Trường hợp 4. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$x = 0 \Rightarrow S_{td} = 0$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{td} = 0$

$0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$, thì $S_{IJK} = \frac{1}{2}IJ.MK$.

Ta có $IJ // BC \Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$

Tương tự $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{IJK} = \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

$\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{2}}{3}$, dễ thấy IJEF là hình thang nên $S_{IJEF} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$

$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$, $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$

$\Rightarrow EF = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$

$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{OA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow MN = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$

Vậy $S_{IJEF} = \frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.

Xét các trường hợp ta thấy S_{td} lớn nhất trong trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

và $\max S_{IJEF} = \frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

40. Kẻ $CH \perp (P)$ thì $\widehat{CKH}$ là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$\widehat{(CA,(P))} = \widehat{CAH} = \alpha, \widehat{(CB,(P))} = \widehat{CBH} = \beta$

Đặt $CH = h$, ta có $CA = \frac{h}{\sin\alpha}, CB = \frac{h}{\sin\beta}$

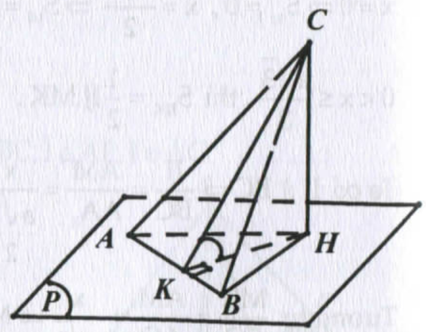
$AB^2 = CA^2 + CB^2 = \frac{h^2}{\sin^2\alpha} + \frac{h^2}{\sin^2\beta}$

$= h^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)$.

Xét tam giác ABC có $CK.AB = CA.CB$

$\Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{AB} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{h}{\sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)}}$

$= \frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}$.



Ta có $\sin\widehat{CKH} = \frac{CH}{CK} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

41.

a) Dễ thấy $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAO} = \phi$ nên

$SO = SA\cos\phi$ (1).

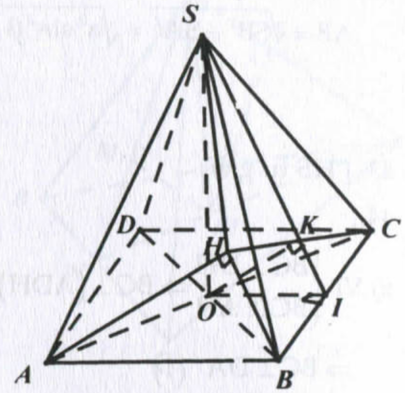
Gọi I là trung điểm của BC thì ta có

$\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIO)$

Kẻ $OK \perp SI$ thì $OK \perp BC$ nên $OK \perp (SBC)$.

Kẻ $At \parallel OK$ cắt CK tại H, khi đó ta có

$\begin{cases} AH \parallel CK \\ CK \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$



nên $\widehat{(SA,(SBC))} = \widehat{SAH} = \phi$ do đó $AH = SA\cos\phi$ (2).

Từ (1),(2) ta có $AH = SO$.

Khi $BH = \frac{a}{2}$ thì trong tam giác vuông HAB có

$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow SO = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) $\tan\phi = \frac{SO}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \phi = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$.

42.

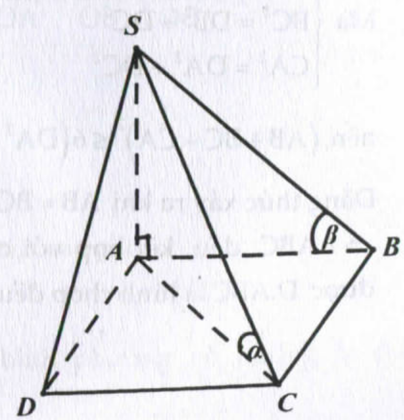
a) Do $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAC} = \alpha$.

Tương tự $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{SBC} = \beta$.

$SA = SC\sin\alpha = a\sin\alpha$



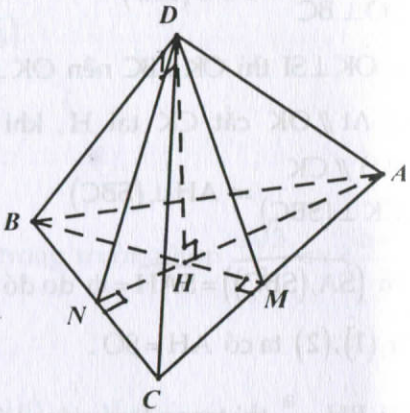
b) $SB = SC\sin\beta = a\sin\beta$

$$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2\sin^2\beta - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$= a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

43. (**HS** tự giải)

44.



a) Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$\Rightarrow BC \perp DA \quad (1)$

Tương tự ta có

$(BDH) \perp AC \Rightarrow DB \perp AC$, vì vậy:

$\begin{cases} DB \perp DC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp (ACD)$

$\Rightarrow DB \perp DA \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $DA \perp (BCD)$

$\Rightarrow DA \perp DC$ hay $\widehat{CDA} = 90^0$.

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện $ABCD$ có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có

$$(AB + BC + CA)^2 \le 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

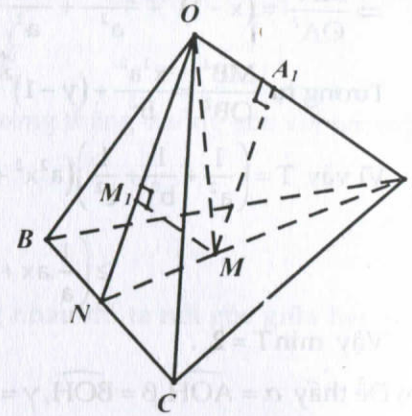
Mà $\begin{cases} AB^2 = DA^2 + DB^2 \\ BC^2 = DB^2 + DC^2 \\ CA^2 = DA^2 + DC^2 \end{cases}$

nên $(AB + BC + CA)^2 \le 6(DA^2 + DB^2 + DC^2)$.

Đẳng thức xảy ra khi $AB = BC = CA$

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều, kết hợp với chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được $D.ABC$ là hình chóp đều đỉnh D.

45. a) Gọi $N = AM \cap BC$, kẻ $MM_1 \parallel OA$ thì ta có



$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 \parallel OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$

kẻ $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$.

Khi đó

$$AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2$$
$$= OM^2 + (AA_1 - OA_1)(AA_1 + OA_1)$$
$$= OM^2 + OA(OA - 2OA_1)$$
$$= OM^2 + OA^2 - 2OA.OA_1$$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} + 1 - \dfrac{2OA_1}{OA}$ (1).

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$\dfrac{MB^2}{OB^2} = \dfrac{OM^2}{OB^2} + 1 - \dfrac{2OB_1}{OB}$ (2) $\qquad \dfrac{MC^2}{OC^2} = \dfrac{OM^2}{OC^2} + 1 - \dfrac{2OC_1}{OC}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ ta có

$$T = OM^2\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right) - 2\left(\frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC}\right) + 3$$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2}$ nên $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Mặt khác $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{NM}{NA} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \dfrac{OC_1}{OC} = \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC} = 1$

Do đó $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} + 1 \ge 2$ do $OM \ge OH$.

Vậy $\min T = 2$ khi $M \equiv H$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Do A, B, C, M đồng phẳng nên tồn tại x, y, z sao cho:

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\ (x + y + z = 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, bình phương vô hướng ta được

$AM^2 = (x-1)^2 a^2 + y^2b^2 + z^2c^2$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{OA^2}=(x-1)^2+\frac{y^2b^2}{a^2}+\frac{z^2c^2}{a^2}.$$

Tương tự $\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{x^2a^2}{b^2}+(y-1)^2+\frac{z^2c^2}{b^2}, \frac{MC^2}{OC^2}=\frac{x^2a^2}{c^2}+\frac{y^2b^2}{c^2}+(z-1)^2$

Vì vậy $T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)+1$

$$\ge\left(\frac{1}{a}.ax+\frac{1}{b}.by+\frac{1}{c}.cz\right)^2+1=2 \text{ (Theo Cauchy-Schwarz)}$$

Vậy $\min T=2$.

b) Dễ thấy $\alpha=\widehat{AOH},\beta=\widehat{BOH},\gamma=\widehat{COH}$.

Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}\Leftrightarrow\left(\frac{OH}{OA}\right)^2+\left(\frac{OH}{OB}\right)^2+\left(\frac{OH}{OC}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (1).

Lại có $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\Leftrightarrow\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}=\frac{\cot^2x}{1+\cot^2x}$ (*)

Áp dụng CT (*) cho x nhận các giá trị α,β,γ và kết hợp với (1) thu được

$$\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}+\frac{\cot^2\beta}{1+\cot^2\beta}+\frac{\cot^2\gamma}{1+\cot^2\gamma}=1.$$

Đặt $x=\cot^2\alpha,y=\cot^2\beta,z=\cot^2\gamma\ (x,y,z>0)$ thì bài toán trở thành

Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$.

Chứng minh $xyz\le\frac{1}{8}$. Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}\ge2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}\ (2).$$

Tương tự ta có :

$\frac{1}{1+y}\ge2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}$ (3) và $\frac{1}{1+z}\ge2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$ (4)

Nhân theo từng vế các BĐT (2),(3)(4) ta được $xyz\le\frac{1}{8}$ (dpcm).

c) Tương tự như câu b) ta có $\min S=6\sqrt{3}$.

Hai mặt phẳng vuông góc

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\begin{cases}a\perp(P)\\ b\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((P),(Q))}=\widehat{(a,b)}$$

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^0.

Diện tích hình chiếu $S'=S\cos\phi$

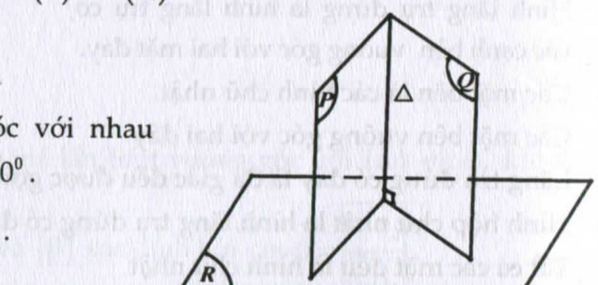
Trong đó S là diện tích đa giác nằm trong (P), S' là diện tích đa giác nằm trong (Q) còn ϕ là góc giữa (P) và (Q).

2. Hai mặt phẳng vuông góc.

2.1. Định nghĩa.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

$$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\widehat{((P),(Q))}=90^0.$$



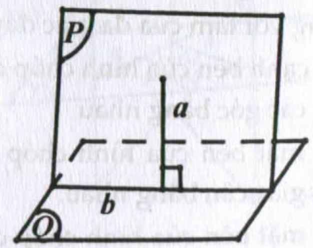
2.2. Tính chất.

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases}a\subset(P)\\ a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow(P)\perp(Q).$$

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ a\subset(P)\\ b=(P)\cap(Q)\\ a\perp b\end{cases}\Rightarrow a\perp(Q)$$

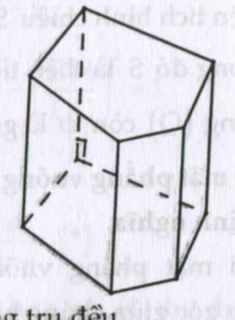


- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A\in(P) \\ (P)\perp(Q) \\ A\in a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow a\subset(P).$$

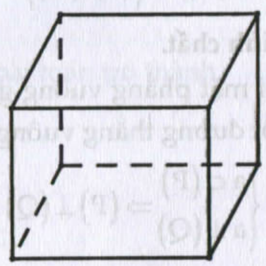
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó

$$\begin{cases} (P)\perp(R) \\ (Q)\perp(R) \\ (P)\cap(Q)=\Delta\end{cases}\Rightarrow \Delta\perp(R)$$



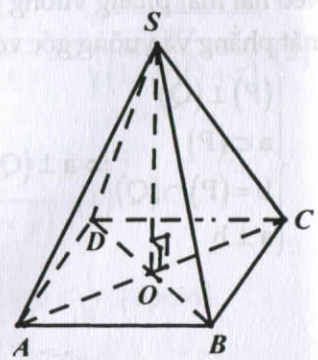
3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật.

- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều
- Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật
- Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là ba kích thước.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy và các mặt bên đều là hình vuông.

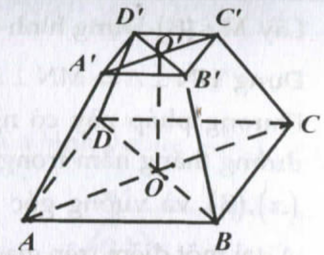


4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.



- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp được gọi là hình chóp cụt đều.
- Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đồng dạng.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1. Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta)\end{cases}\Rightarrow \widehat{((\alpha),(\beta))}=\widehat{(a,b)}.$$

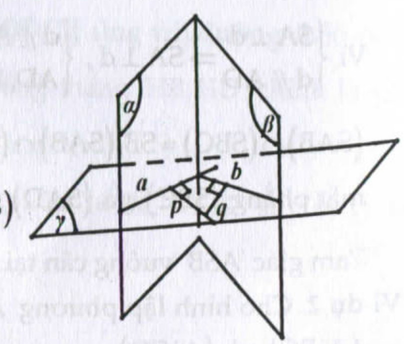
Cách 2. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và β, khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\phi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu $S'=S\cos\phi$, từ đó để tính $\cos\phi$ thì ta cần tính S và S'.

Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

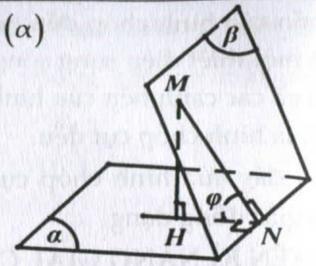
a)

- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$
- Chọn mặt phẳng $(\gamma)\perp\Delta$
- Tìm các giao tuyến $a=(\gamma)\cap(\alpha), b=(\gamma)\cap(\beta)$
- $\widehat{((\alpha),(\beta))}=\widehat{(a,b)}$



b)

- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$



- Lấy $M\in(\beta)$. Dựng hình chiếu H của M trên (α)
- Dựng $HN\perp\Delta \Rightarrow MN\perp\Delta$.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.

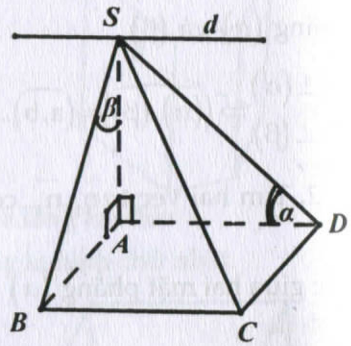
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính:

a) Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Lời giải



a) Ta có $(SCD)\cap(ABCD)=CD$

$$\begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp AD \end{cases} \Rightarrow CB\perp(SAD)$$

$(SAD)\cap(ABCD)=AD,(SAD)\cap(SCD)=SD$

$$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{DA,SD}\right)=\widehat{SDA}=\phi$$

$$\tan\phi=\frac{SA}{AD}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\phi=30^0$$

b) Ta có $\begin{cases} AD\cap(SAD) \\ BC\cap(SBC) \\ AD\,//\,BC \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(SBC)=d\,//\,AD\,//\,BC$.

Vì $\begin{cases} SA\perp d \\ d\,//\,AD \end{cases}\Rightarrow SA\perp d$, $\begin{cases} d\,//\,AD \\ AD\perp AD \end{cases}\Rightarrow d\perp AB$ nên $(SAB)\perp d$

$(SAB)\cap(SBC)=SB,(SAB)\cap(SAD)=SA$ suy ra $\widehat{ASB}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

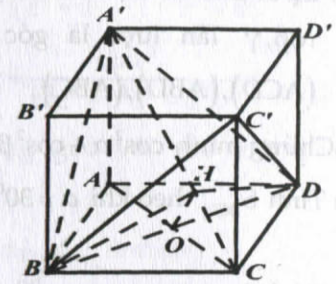
Tam giác ASB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB}=45^0$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $(A'BC)\cap(A'CD)=A'C$. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và H là hình chiếu vuông góc của O trên A'C.



Do $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp AA' \end{cases}\Rightarrow BD\perp(ACA')\Rightarrow BD\perp A'C$

Vậy $\begin{cases} A'C\perp OH \\ A'C\perp BD \end{cases}\Rightarrow A'C\perp(BDH)$.

$(BDH)\cap(A'CD)=HD,(BDH)\cap(A'BC)=BH$

$$\Rightarrow\left(\widehat{(A'BC),(A'CD)}\right)=\left(\widehat{HB,HD}\right).$$

Tam giác BCA' vuông tại B có đường cao BH, do đó:

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA'^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BH=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự $DH=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Áp dụng định lí côsin cho ΔHBD ta có:

$$\cos\widehat{BHD}=\frac{HB^2+HD^2-BD^2}{2HB.HD}=\frac{\frac{2a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}-2a^2}{2.\frac{2a^2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\widehat{BHD}=120^0$. Vậy $\left(\widehat{(A'BC),(A'CD)}\right)=\left(\widehat{HB,HD}\right)=60^0$.

Cách 2. Gọi $H=A'C\cap(BDC')$, do mặt chéo (BDC') ứng với đường chéo A'C nên $(BDC')\perp A'C$. Vậy góc giữa hai đường thẳng HB, HD chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Do $CB=CD=CC'\Rightarrow HB=HD=HC'$ và $BD=BC'=DC'=a\sqrt{2}$ suy ra H là tâm của tam giác đều $C'BD\Rightarrow\widehat{BHD}=120^0$.

Vậy $\left(\widehat{(A'BC),(A'CD)}\right)=\left(\widehat{HB,HD}\right)=60^0$.

Cách 3: Do $\begin{cases} AB'\perp A'B \\ AB'\perp BC \end{cases}\Rightarrow AB'\perp(A'BC)$

Tương tự $AD'\perp(A'CD)$ nên $\left((A'BC),(A'CD)\right)=\left(\widehat{AB',AD'}\right)=60^0$

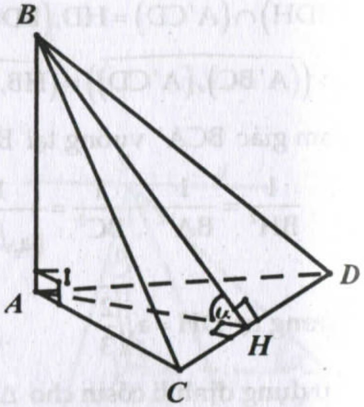
(vì $\Delta AB'D'$ đều).

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD có $AB=b, AC=c, AD=d$ đôi một vuông góc. Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ABC)$.

a) Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

b) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha=30^0,\beta=45^0,\gamma=60^0$

Lời giải



a) *Cách 1.*

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do:

$\begin{cases}AB\perp AC\\ AB\perp AD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(ACD)\Rightarrow AB\perp CD.$

Vậy $(ABH)\perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha=\widehat{AHB}$.

Ta có

$\tan\alpha=\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{b}{AH}$, mà $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}$ nên $\tan\alpha=\dfrac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}$.

Mặt khác $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$.

Tương tự ta có: $\cos^2\beta=\dfrac{b^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$, $\cos^2\gamma=\dfrac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec b,\overrightarrow{AC}=\vec c,\overrightarrow{AD}=\vec d\Rightarrow|\vec b|=b,|\vec c|=c,|\vec d|=d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH}\perp(BCD)$ và $\begin{cases}BH.BI=BA^2=b^2\\ IH.IB=IA^2=\dfrac{c^2d^2}{c^2+d^2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{BH}{IH}=\dfrac{b^2(c^2+d^2)}{c^2d^2}=k$

Suy ra $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$, mà $\dfrac{IC}{ID}=\dfrac{AC^2}{AD^2}=\dfrac{c^2}{d^2}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{CD}$ nên:

$$\overrightarrow{AH}=\frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\overrightarrow{AB}+\frac{b^2c^2+d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AB}\right)$$

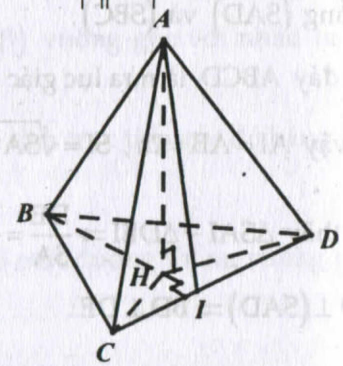
$$=\frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec b+\frac{d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec c+\frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec d$$

Lại có $\vec b,\vec c,\vec d$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ACB)$. Từ đó ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec b.\overrightarrow{AH}|}{|\vec b||\overrightarrow{AH}|}=\frac{\dfrac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\dfrac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}}=\frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Tương tự : $\cos\beta=\dfrac{|\vec c.\overrightarrow{AH}|}{|\vec b||\overrightarrow{AH}|}=\dfrac{bd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{|\vec d.\overrightarrow{AH}|}{|\vec b||\overrightarrow{AH}|}=\dfrac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$

Suy ra $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$



b) Sử dụng công thức hình chiếu

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).

Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn. Không giảm tổng quát, giả sử $\hat B$ lớn nhất.

Ta có $CD^2=AC^2+AD^2=c^2+d^2$

Tương tự $CB^2=b^2+c^2, DB^2=b^2+d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có $\cos B=\dfrac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC.BD}$

$$=\frac{(b^2+c^2)+(b^2+d^2)-(c^2+d^2)}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}}$$

$=\dfrac{2b^2}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}}>0$ do đó $\hat B$ nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases}AH\perp CD\\ AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow BH\perp CD$, tương tự ta có $CH\perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD.

Do đó $S_{BCD} = S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{ABC}\cos\gamma + S_{ABD}\cos\beta + S_{ACD}\cos\alpha$

$$= \frac{1}{2}bc\cos 60^0 + \frac{1}{2}bd\cos 45^0 + \frac{1}{2}cd\cos 30^0 = \frac{bc+\sqrt{2}bd+\sqrt{3}cd}{4}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải

a) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD)\cap(SBC)$. $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$

Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$. Do đó $\widehat{BED}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy ABCD là nửa lục giác đều nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

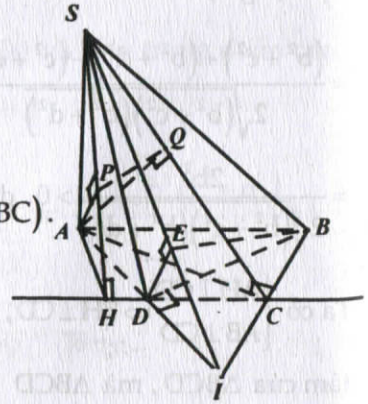
Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \frac{DE}{SA} = \frac{DI}{SI} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$.

Trong tam giác vuông BDE ta có $\tan\widehat{BED} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{7} \Rightarrow \widehat{BED} = \arctan\sqrt{7}$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right) = \arctan\sqrt{7}$



b) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$.

Do đó $\widehat{PAQ} = \left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)$.

Trong tam giác SAH ta có :

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos\widehat{APQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{APQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 90^0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta).$$

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta).$$

Cách 3. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ rồi chứng minh $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$.

CÁC VÍ DỤ

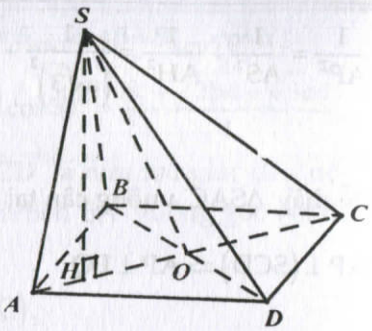
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Tính đường cao của hình chóp S.ABCD theo a, b.

c) Tìm sự liên hệ giữa a và b để S.ABCD là một hình chóp đều.

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$, vì tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên nó là một hình thoi, vì thế $AC \perp BD$ và O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB = SD = b \Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S, do đó $SO \perp BD$.

Vậy $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$ nên trong (SAC) kẻ $SH \perp AC, H \in AC$ thì $SH \perp (ABCD)$, hay SH là đường cao của hình chóp.

Do hình chóp có các cạnh $SB = SD = b, CB = Cd = b, AB = AD = b$ nên các tam giác SBD, CBD, ABD là các tam giác cân bằng nhau suy ra $OS = OA = OC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S. Từ đó ta có $SH.AC = SA.SC \Rightarrow SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Hình chóp $S.ABCD$ là một hình chóp đều thì các cạnh bên bằng nhau nên $a = b$.

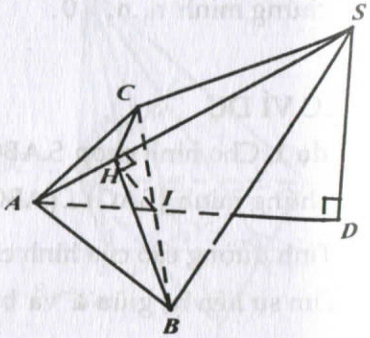
Và khi $a = b$ thì $AC = a\sqrt{2}$ mà $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên nó là hình vuông, từ đó $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

Vậy $S.ABCD$ là một hình chóp đều khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $\widehat{BHC}$.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AD}$.

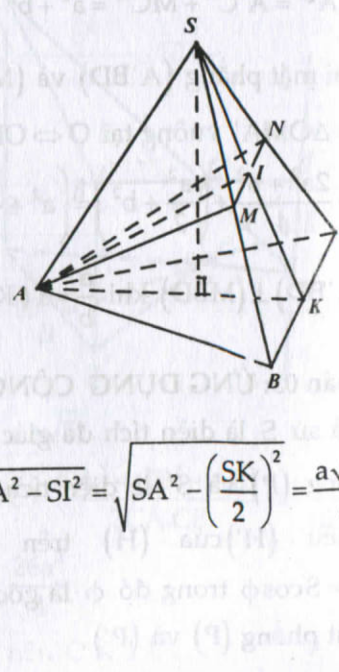
Mà $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

suy ra $IH = \dfrac{AI.SD}{AD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$. Từ giả thiết ta có $MN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}, MN // BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN. Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.



Mặt khác $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$

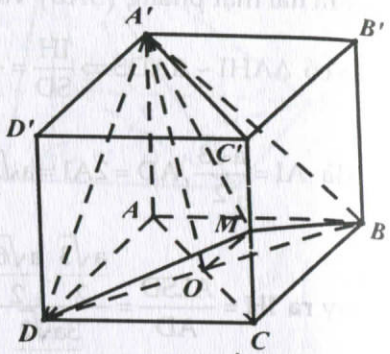
$\Rightarrow \Delta SAK$ cân tại $A \Rightarrow SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\dfrac{SK}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}MN.AI = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.



Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$, $\begin{cases} AC \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow (ACC'A') \perp BD$

Vậy $\begin{cases} (ACC'A') \perp BD \\ (ACC'A') \cap (A'BD) = OA' \\ (ACC'A') \cap (MBD) = OM \end{cases}$ do đó góc giữa hai đường thẳng OM, OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

$OA'^2 = AO^2 + AA'^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{2} + b^2$.

$MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4}$.

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau

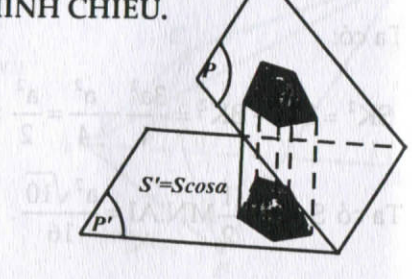
$\Leftrightarrow \Delta OMA'$ vuông tại $O \Leftrightarrow OM^2 + OA'^2 = MA'^2$

$\Leftrightarrow \frac{2a^2 + b^2}{4} + \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) = \left(a^2 + \frac{5b^2}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

$(A'BD) \perp (MBD)$ khi $\frac{a}{b} = 1$ (Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương)

Bài toán 03: ỨNG DỤNG CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU.

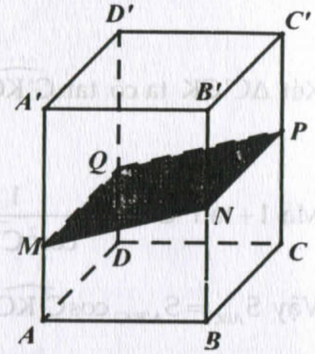
Giả sử S là diện tích đa giác (H) nằm trong (P) và S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (P') thì $S' = S\cos\phi$ trong đó ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 45^0 và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q. Tính diện tích thiết diện, biết cạnh đáy của lăng trụ bằng a.

Lời giải



Gọi S là diện tích thiết diện MNPQ.

Ta có hình chiếu của MNPQ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

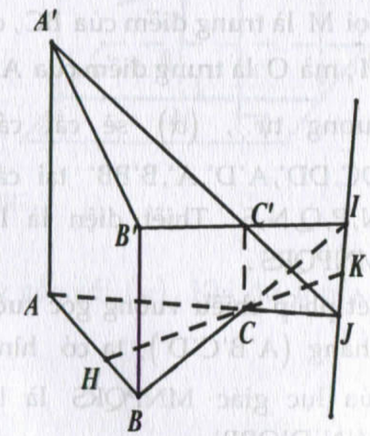
$S' = S_{ABCD} = a^2$

Gọi $\phi = \left(\widehat{(\alpha),(ABCD)}\right)$ thì $\phi = 45^0$

Do $S' = S\cos\phi = S\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A, B, C lần lượt lấy các điểm A', B', C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải



Ta có $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $CH \perp AB, CH = a, AH = a$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAC} = 45^0$.

Gọi $I = B'C' \cap BC, J = A'C' \cap AC$.

Ta có $CC' = \frac{1}{2}BB' \Rightarrow BC = CI$

$CC' = \frac{1}{3}AA' \Rightarrow CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔBCH ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Mặt khác $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = -\frac{1}{10}$.

Xét ΔICJ ta có $IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos\widehat{ICJ} = \frac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC' \perp (ICJ)$ nên $C'K \perp IJ$.

Vậy $\widehat{C'KC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}$.

Ta có $S_{ICJ} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{3a^2}{4}$, mặt khác $S_{ICJ} = \frac{1}{2}IJ.CK \Rightarrow CK = \frac{2S_{ICJ}}{IJ} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{26}}$.

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan\widehat{C'KC} = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1+\tan^2\widehat{C'KC} = \frac{1}{\cos^2\widehat{C'KC}} \Rightarrow \cos\widehat{C'KC} = \frac{3}{\sqrt{35}}$.

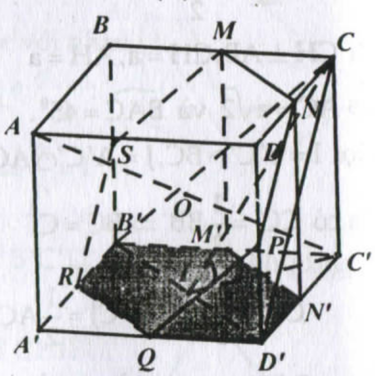
Vậy $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC} \Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{S_{ABC}}{\cos\widehat{C'KC}} = \frac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của hình lập phương và vuông góc với đường chéo AC'. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi (α).

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, do $MA = MC' = a\sqrt{5}$ nên $\Delta MAC'$ cân tại M, mà O là trung điểm của $AC' \Rightarrow MO \perp AC' \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Tương tự, (α) sẽ cắt các cạnh $DC, DD', A'D', A', B'BB'$ tại các điểm N, P, Q, N, S. Thiết diện là lục giác $MNPQRS$.



Xét phép chiếu vuông góc xuống mặt phẳng $(A'B'C'D')$, ta có hình chiếu của lục giác $MNPQRS$ là lục giác $M'N'D'QRB'$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích của các lục giác $MNPQRS$ và $M'N'D'QRB'$ thì $S' = S\cos\phi$ (1) với ϕ là góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $S' = S_{A'B'C'D'} - (S_{A'QR} + S_{C'M'N'}) = a^2 - \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8}\right) = \frac{3a^2}{4}$. (2)

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì $(ICC') \perp B'D'$ nên $\widehat{CIC'}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $\cos\widehat{CIC'} = \frac{IC}{IC'} = \frac{IC}{\sqrt{CC'^2 + IC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lại có $(\alpha)//(CB'D')$ nên $\phi = \widehat{CIC'} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (3)

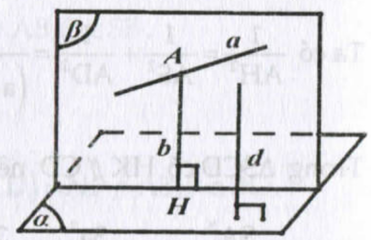
Từ (1),(2),(3) ta có $S = \frac{S'}{\cos\phi} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Bài toán 04: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Bài toán: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α). Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α).



Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A \in a$
- Dựng đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α). Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định và tính thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

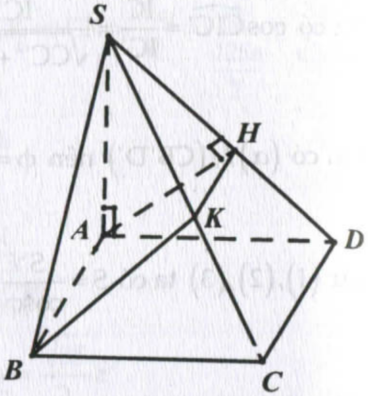
Lời giải

Kẻ $AH \perp SD$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, lại có $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$.



Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ H \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HK \,//\, AB \,//\, CD$. Thiết diện là tứ giác AHKB.

Dễ thấy AHKB là hình thang vuông tại A và H, nên:

$$S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH.$$

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSCD có $HK \,//\, CD$ nên $\dfrac{HK}{CD} = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{SH.SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SD^2}$

$= \dfrac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \dfrac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}CD = \dfrac{3}{4}a$.

Vậy $S_{AHKB} = \dfrac{1}{2}(AB + HK)AH = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{3a}{4}\right)\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 2.

a) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp S.ABCD.

b) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Lời giải

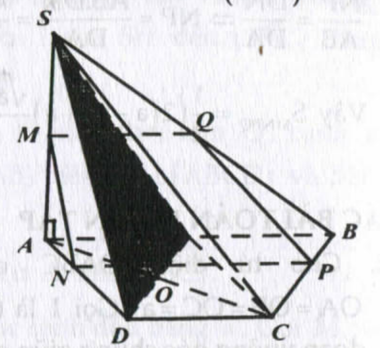
a) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì ADCE là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.

Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.



Ta có $SO = \sqrt{OA^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

$BC = DE = a\sqrt{2}$, do $DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp AO \Rightarrow S_{SDE} = \dfrac{1}{2}SO.DE$

$= \dfrac{1}{2}.a\sqrt{\dfrac{3}{2}}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} AB \perp (SAD) \\ (\beta) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \,//\, (\beta)$.

Vậy $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MQ \,//\, AB, Q \in SB$.

Tương tự, $\begin{cases} N \in (\beta) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (ABCD) = NP \,//\, AB, P \in BC$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Do $\begin{cases} NP \,//\, AB \\ MQ \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, MQ \quad (1)$

Lại có $\begin{cases} MN \subset (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN \quad (2)$

Từ (1),(2) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(NP + MQ)MN$.

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + x^2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$, $MQ = \dfrac{1}{2}AB = a$

$$\frac{NP}{AB}=\frac{DN}{DA}\Rightarrow NP=\frac{AB.DN}{DA}=\frac{2a(a-x)}{a}=2(a-x)$$

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}\left(2(a-x)+a\right)\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2}=\frac{(3a-x)\sqrt{a^2+4x^2}}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

64. Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC b) AI và OC

65. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA\perp(ABC)$ và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

66. Cho tứ diện ABCD có $AD\perp(ABC)$, $AC=AD=4cm$, $AB=3cm$, $BC=5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A,B sao cho $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC,BD cùng vuông góc với Δ và $AC=BD=AB$. Xác định điểm O cách đều các điểm A,B,C,D và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

68. Cho tứ diện ABCD có $AB=a, AC=b, AD=c$ và $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

69. Cho hình chóp S.ABC có $SA=3a$ và $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC có $AB=BC=2a$, góc $\widehat{ABC}=120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

70. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông $BA=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM,B'C.

71. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA=BC=a, AD=2a$. Cạnh bên $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

72. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

73. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC=a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH\perp(ABCD)$ và $SH=a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD). b) Từ A đến (SBC).

74. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M và CN.

75. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, $SO\perp(ABCD)$, $AC=4, BD=2, SO=\sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

76. Cho tứ diện ABCD có $AB=CD=a, AD=BC=b, AC=BD=c$. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

77. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN\perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

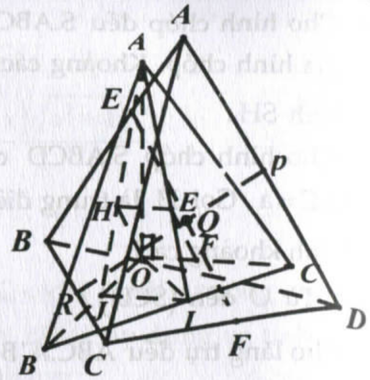
78. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$, cạnh $SA\perp(ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

79. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH\perp(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

80. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB=a, AC=2a, AA'=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB\perp MA'$ và tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

64.



a) Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OI$

Lại có $OB = OC$ và I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC$. Vậy OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

$OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

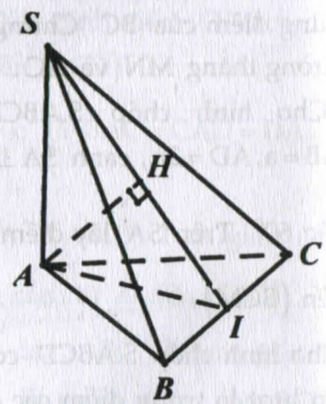
b) Gọi J là trung điểm của OB thì mặt phẳng (AIJ) chứa AI và song song với OC. Hạ $OH \perp AJ, H \in AJ$.

Ta có $\begin{cases} IJ \,//\, OC \\ OC \perp (OAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (OAB) \Rightarrow IJ \perp OH$ vì vậy $OH \perp (AIJ)$. Từ H kẻ đường thẳng song song với IJ cắt AI tại E, từ E kẻ đường thẳng song song với OH cắt OC tại F thì EF là đoạn vuông góc chunh của AI và OC.

Trong tam giác OAJ có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OJ^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $EF = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

65. Gọi I là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AI \perp BC$, mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow (SAI) \perp (SBC)$ do đó hạ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBC)$.



Vậy $d(A,(SBC)) = AH$.

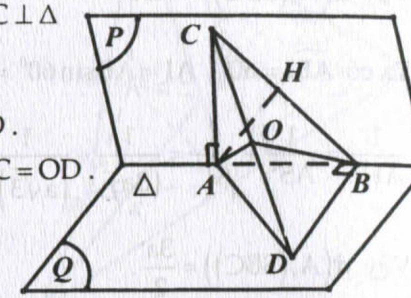
Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

66. Chứng minh được AB, AC, AD đôi một vuông góc, từ đó tính được $d(A,(DBC)) = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

67. Gọi O là trung điểm của CD



Ta có $(P) \perp (Q)$ và $\Delta = (P) \cap (Q)$, mà $AC \perp \Delta$

$\Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$

$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $A \Rightarrow OA = OC = OD$.

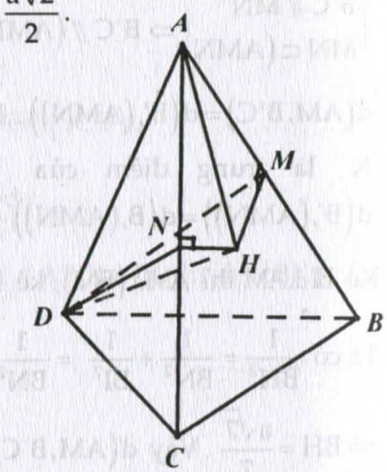
Tương tự ΔBCD vuông tại $B \Rightarrow OB = OC = OD$.

Vậy $OA = OB = OC = OD$.

Hạ $AH \perp CB$ thì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$ do đó $d(A,(BCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

68. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)



Hạ $HM \perp AB, HN \perp AC$.

Xét hai tam giác vuông AMD và AND có AD chung, $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} = 60^0$ nên $\Delta MAD = \Delta NAD$

$\Rightarrow DM = DN \Rightarrow HM = HN$ do đó AH là đường phân giác góc A của tam giác ABC.

Ta có $AM = AD\cos 60^0 = \dfrac{c}{2}$.

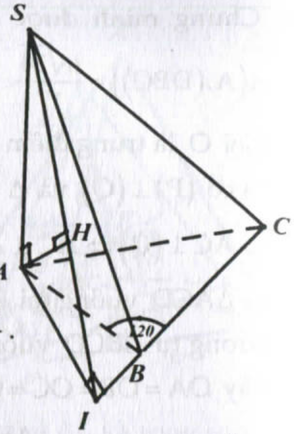
$$AH = \frac{AM}{\cos 30^0} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(D,(ABC)) = \dfrac{c\sqrt{6}}{3}$.

69. Kẻ $AI \perp BC, I \in BC$, ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAI)$.



Kẻ $AH \perp SI$ thì $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

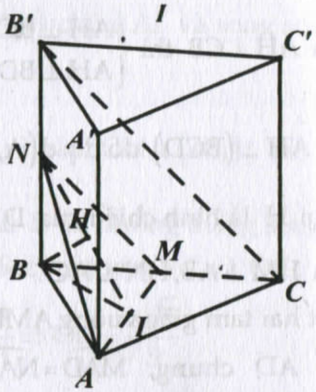
Vậy $d(A,(SBC)) = AH$.

Ta có $\widehat{ABI} = 60^0$, $AI = AB\sin 60^0 = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}.$$

Vậy $d(A,(SBC)) = \frac{3a}{2}$.

70. Gọi N là trung điểm của BB' ; ta có



$\begin{cases} B'C \,//\, MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C \,//\, (AMN)$ do đó

$d(AM,B'C) = d(B',(AMN))$. Mặt khác N là trung điểm của BB' nên $d(B',(AMN)) = d(B,(AMN))$

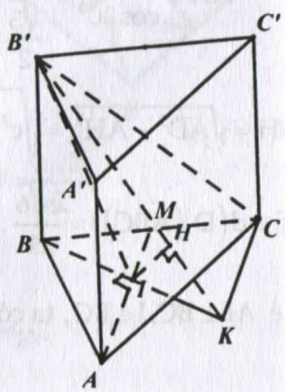
Kẻ $BI \perp AM$ thì $AM \perp (BNI)$, kẻ $BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (AMN)$ nên $d(B,(AMN)) = BH$.

Ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$.

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy $d(AM,B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2. Kẻ $BI \perp AM$ thì $(IBB') \perp AM$, kẻ $CK \,//\, AM$ thì $CK \perp (IBB')$

Xét phép chiếu vuông góc lên (IBB') thì ta có B'K là hình chiếu của B'C trên (IBB') nên $d(AM,B'C) = d(I,B'K)$.



Hạ $IH \perp B'K, H \in B'K$, ta có

$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

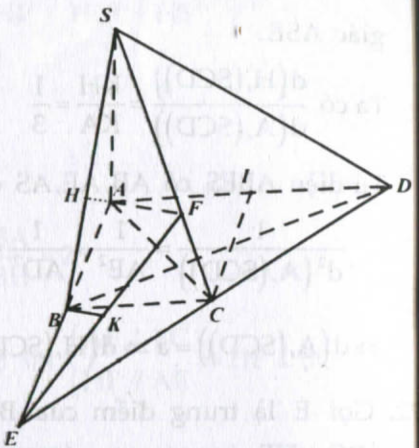
Dễ thấy $BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ và

$B'K = \sqrt{BK^2 + BB'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{5} + 2a^2} = a\sqrt{\frac{14}{5}}$.

Ta có $\Delta KHI \sim \Delta KBB' \Rightarrow \frac{IH}{BB'} = \frac{IK}{B'K}$

$\Rightarrow IH = \frac{IK.BB'}{B'K} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{5}}{a\sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d(AM,B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.



71. Gọi I là trung điểm của AD, thế thì $IA = ID = IC = \frac{AD}{2}$ nên ΔACD vuông tại C $\Rightarrow CD \perp AC(1)$

Lại có $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SA \perp CD$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow CD \perp SC$ hay tam giác SCD vuông tại C.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B,H đến (SCD).

Ta có $\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$.

Kẻ $AF \perp SC$ thì dễ thấy $AF \perp (SCD)$, kẻ $BK \,//\, AF, K \in EF$ thì $d_1 = BK$.

Gọi $E = AB \cap CD$.

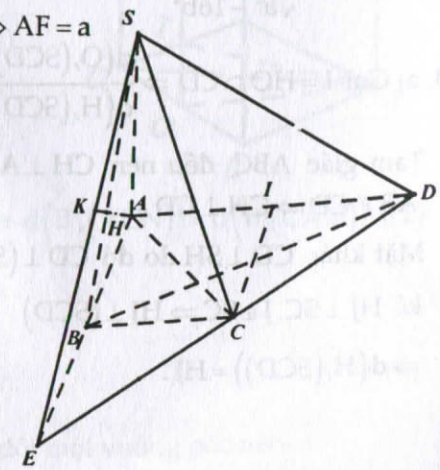
Ta có $\frac{BK}{AF} = \frac{EB}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AF$.

Mặt khác, trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AF = a$$

$\Rightarrow KB = \frac{a}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$

Vậy $d(H,(SCD)) = d_2 = \frac{a}{3}$.



Lưu ý: Có thể tính khoảng cách từ H đến (SCD) theo cách khác như sau:

Gọi $E = AB \cap CD, K = AH \cap SE$

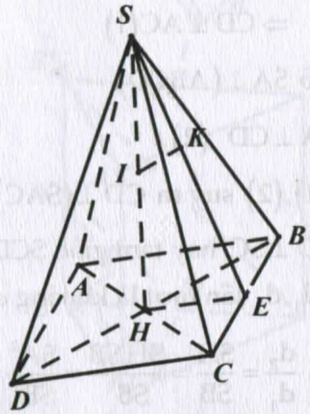
Dễ thấy B là trung điểm của AE và $\frac{SH}{SB}=\frac{2}{3}$ nên H là trọng tâm của tam giác ASE.

Ta có $\frac{d\left(H,(SCD)\right)}{d\left(A,(SCD)\right)}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}$

Tứ diện ABES có AB, AE, AS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2\left(A,(SCD)\right)}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}.$$

$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=a\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=\frac{a}{3}.$



72. Gọi E là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}BC\perp HE\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHE)$

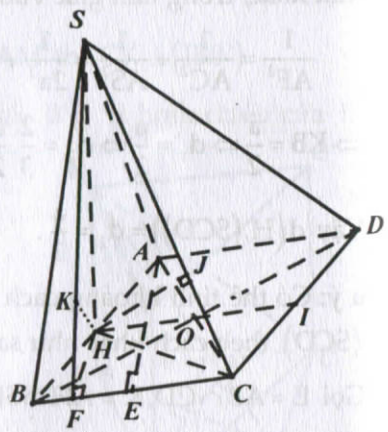
$\Rightarrow (SHE)\perp(SBC)$. Do đó $IK\perp SE$ thì $IK\perp(SBC)\Rightarrow IK=b$.

Ta có $\Delta SKI\sim\Delta SHE\Rightarrow\frac{IK}{HE}=\frac{SK}{SH}$

$\Rightarrow SH=\frac{HE.SK}{IK}$ (*), mà $HE=\frac{a}{2}, IK=b, SK=\sqrt{SI^2-IK^2}=\sqrt{\frac{SH^2}{4}-b^2}$ nên

$(*)\Leftrightarrow SH=\frac{a}{2b}\sqrt{\frac{SH^2}{4}-b^2}\Leftrightarrow SH=\frac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}.$

Vậy $SH=\frac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}.$



73. a) Gọi $I=HO\cap CD\Rightarrow\frac{d\left(O,(SCD)\right)}{d\left(H,(SCD)\right)}=\frac{OI}{HI}=\frac{1}{2}$

Tam giác ABC đều nên $CH\perp AB$ mà $AB\,//\,CD\Rightarrow CH\perp CD$.

Mặt khác $CD\perp SH$ do đó $CD\perp(SHC)$, kẻ $HJ\perp SC, J\in SC\Rightarrow HJ\perp(SCD)$

$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=HJ.$

Ta có $HC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, trong tam giác SHC có $\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HC^2}+\frac{1}{HS^2}$ z.

$\Rightarrow HJ=a\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

$\Rightarrow d\left(O,(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(H,(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{14}$

b) Ta có $B=AB\cap(SBC)$ nên $\frac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(H,(SBC)\right)}=\frac{BA}{BH}=2$

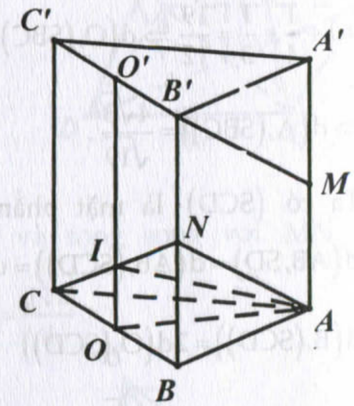
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BE thì $\begin{cases}AE\perp BC\\ HF\,//\,AE\end{cases}\Rightarrow HF\perp BC$

Vậy $\begin{cases}BC\perp HF\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHF)\Rightarrow(SBC)\perp(SHF)$, do đó kẻ $HK\perp SF$ thì $HK\perp(SBC)$ nên $d\left(H,(SBC)\right)=HK$.

Ta có $HF=\frac{AE}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HF^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{16}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{19}{3a^2}$

$\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=2d\left(H,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}.$

Vậy $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}.$



74. Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. $I=OO'\cap CN$.

Do $\begin{cases}B'M\,//\,AN\\ AN\subset(ACN)\end{cases}\Rightarrow B'M\,//\,(CAN)$

$\Rightarrow d\left(B'M,CN\right)=d\left(B'M,(ACN)\right)$

$=d\left(B',(ACN)\right)$ (1).

Mặt khác N là trung điểm của BB' nên $d\left(B',(ACN)\right)=d\left(B,(CAN)\right)$ (2).

Ta có $CB\cap(CAN)=C$

$\Rightarrow\frac{d\left(B,(CAN)\right)}{d\left(O,(CAN)\right)}=\frac{CB}{CO}=2$ (3)

Dễ thấy tứ diện OACI có OA, OC, OI đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(O,(ACN))}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OI^2}\ (4)$$

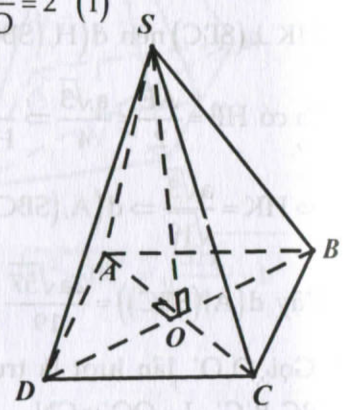
Dễ thấy $OC=\frac{a}{2}, OI=\frac{CN}{2}=\frac{a}{4}, OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\frac{1}{d^2(O,(ACN))}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{16}{a^2}=\frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(O,(ACN))=\frac{a\sqrt{3}}{8}\ (5).$$

Từ (1),(2),(3),(4),(5) ta có $d(B'M,CN)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

75. a) Ta có $AO\cap(SBC)=C$ nên $\frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\frac{CA}{CO}=2\ (1)$



Mặt khác dễ thấy tứ diện OBCS có các cạnh OB,OC,OS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(O,(SBC))}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OS^2}$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{19}{12}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow d(A,(SBC))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

b) Ta có (SCD) là mặt phẳng chứa SD và song song với AB vì vậy $d(AB,SD)=d(AB,(SCD))=d(B,(SCD))$. Tương tự như câu a) ta có $d(B,(SCD))=2d(O,(SCD))$ mà $d(O,(SCD))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\Rightarrow d(B,(SCD))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$,

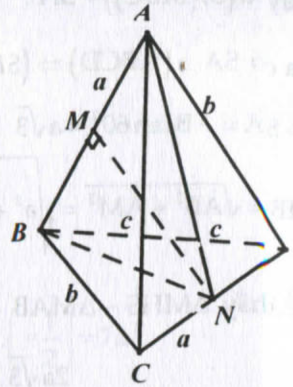
hay $d(AB,SD)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

76. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Xét hai tam giác ACD và BCD có CD chung $AC=BD, AD=BC$ nên $\Delta ACD=\Delta BCD$, mà M là trung điểm của AB nên $MN\perp AB$.

Lí luận tương tự ta cũng có $MN\perp CD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD, do đó $d(AB,CD)=MN$.



Ta có $AN^2=\frac{AC^2+AD^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

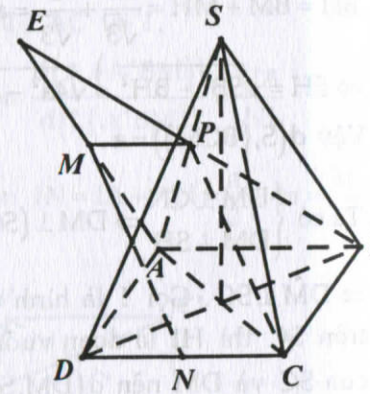
$$MN^2=AN^2-AM^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}},$$

hay $d(AB,CD)=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Tính tương tự ta có : $d(AD,BC)=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

77. Gọi P là trung điểm của SA.



Ta có MP là đường trung bình của ΔEAD

$\Rightarrow MP \parallel AD \Leftrightarrow MP \parallel BC$.

Do đó MP //= NC nên MPCN là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel CP$.

Mặt khác ABCD là hình chóp đều nên dễ dàng chứng minh được $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp CP$.

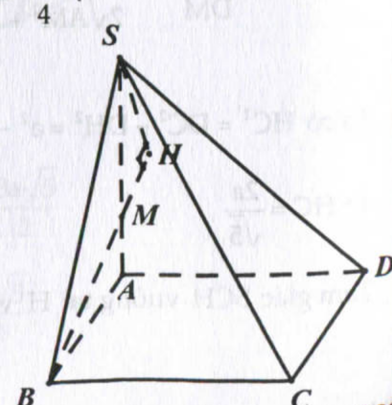
Vậy $\begin{cases}MN \parallel CP\\ BD\perp CP\end{cases}\Rightarrow MN\perp BD$.

Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa AC và song song với MN nên

$$d(MN,AC)=d(N,(SAC))=\frac{1}{2}d(B,(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $d(MN,AC)=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

78. Kẻ $SH\perp BM$.



Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SH$

Lại có $\begin{cases}SH\perp BM\\ SH\perp BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(MBC)$.

Vậy $d(S,(MBC)) = SH$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB,(ABCD)}) = \widehat{SBA} = 60^0$

$\Rightarrow SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

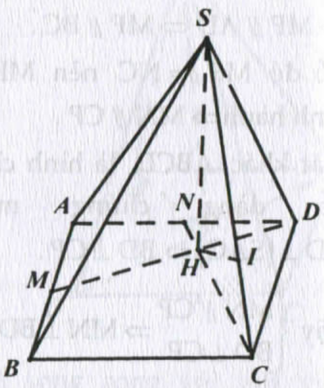
Dễ thấy $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên $\frac{MH}{MA} = \frac{MS}{MB}$

$$\Rightarrow HM = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$BH = BM + MH = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy $d(S,(BCM)) = a$.



79. Ta có $\begin{cases} DM \perp CN \\ DM \perp SH \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SCN)$

$\Rightarrow DM \perp SC$. Gọi I là hình chiếu của H trên SC thì HI là đoạn vuông góc chung của SC và DM nên $d(DM,SC) = HI$.

Tứ giác AMHN nội tiếp nên:
$DH.DM = DN.DA$

$$\Rightarrow DH = \frac{DN.DA}{DM} = \frac{a^2}{2\sqrt{AM^2 + AD^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $HC^2 = DC^2 - DH^2 = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5}$

$\Rightarrow HC = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Tam giác SCH vuông tại H và có đường cao HI nên $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2}$

$$= \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HI = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

Vậy $d(DM,SC) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

80. Áp dụng định lí cô sin ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = a^2 + 4a^2 - 2.2a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}$.

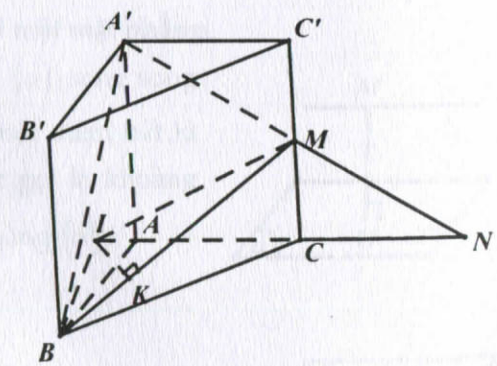
Ta có $BM = \sqrt{BC^2 + MC^2} = 2a\sqrt{3}, A'B = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = a\sqrt{21}$

$A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = 3a$, từ đó ta có $MB^2 + MA'^2 = 21a^2 = A'B^2$ nên tam giác MA'B vuông tại M hay $MB \perp MA'$. Kẻ $BI \perp AC$ tại I.

Gọi $N = A'N \cap AC$, ta có $IA \cap (A'BM) = N$ nên $\frac{d(A,(A'BM))}{d(I,(A'BM))} = \frac{NA}{NI}$

Ta có $AN = 2AC = 4a$, $AI = AB\cos 60^0 = \frac{a}{2}$ nên $IN = IA + AN = \frac{a}{2} + 4a = \frac{9a}{2}$,

do đó $\frac{d(A,(A'BM))}{d(I,(A'BM))} = \frac{4a}{\frac{9a}{2}} = \frac{8}{9}$.



Dễ thấy $BI \perp (ACC'A') \Rightarrow BI \perp A'M$,

vậy $\begin{cases} A'M \perp BI \\ A'M \perp MB \end{cases} \Rightarrow A'M \perp (IMB)$

$(IBM) \perp (A'BM) = BM$

nên kẻ $IK \perp BM$ thì $IK \perp (A'BM)$.

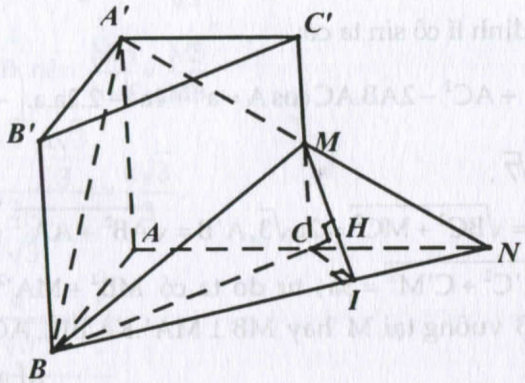
Vậy $d(I,(A'BM)) = IK$.

$$\text{Ta có } IM = \sqrt{IC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{45a^2} = \frac{64}{45a^2} \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{5}}{8}$$

Do đó $d\left(A,(A'BM)\right)=\frac{8}{9}.\frac{3a\sqrt{5}}{8}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Lưu ý: Có thể sử dụng $\frac{d\left(A,(A'BM)\right)}{d\left(C,(A'BM)\right)}=\frac{NA}{NC}$ dựng như hình vẽ cũng tính được khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

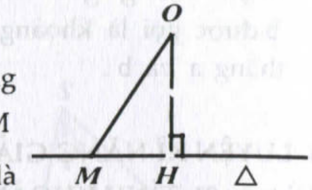


Khoảng cách

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp(M,\Delta)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

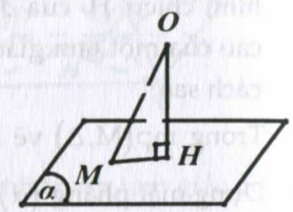


$d(M,\Delta)=MH$

Nhận xét: $OH\le OM,\forall M\in\Delta$

2. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

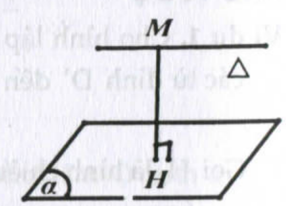


$d(M,(\alpha))=MH$

Nhận xét: $OH\le MO,\forall M\in(\alpha)$

3. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.

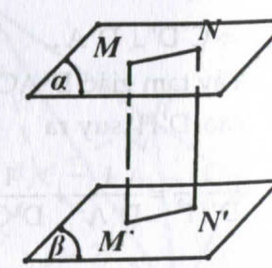
Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).



$d(\Delta,(\alpha))=d(M,(\alpha)),M\in\Delta$.

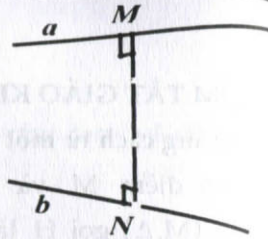
4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



$d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))=d(N,(\alpha))$ $,M\in(\alpha),N\in(\beta)$.

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng.



Cho hai đường thẳng chéo nhau a,b . Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM M ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG Δ.

Phương pháp:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

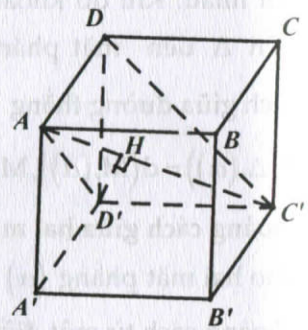
- Trong mp(M,Δ) vẽ $MH \perp \Delta \Rightarrow d(M,\Delta) = MH$
- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại $H \Rightarrow d(M,\Delta) = MH$.

Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

- ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{MA^2} + \dfrac{1}{MB^2}$.
- MH là đường cao của ΔMAB thì $MH = \dfrac{2S_{MAB}}{AB}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng các từ đỉnh D' đến đường chéo AC'.



Lời giải

Gọi H là hình chiếu của D' trên AC'.

Do $\begin{cases} C'D' \perp D'A' \\ C'D' \perp DD' \end{cases} \Rightarrow C'D' \perp (ADD'A')$

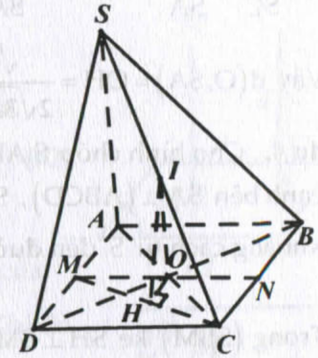
$\Rightarrow C'D' \perp D'A$.

Vậy tam giác D'AC' vuông tại D' có đường cao D'H suy ra

$$\frac{1}{D'H^2} = \frac{1}{D'A^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow D'H = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Vậy $d(D, AC') = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ví dụ 2. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM.



Lời giải

Trong (ICM) kẻ $IH \perp CM$ thì $d(I,CM) = IH$.

Gọi $N = MO \cap DC, N \in CD$.

Ta có $\Delta MHO \sim \Delta MNC \Rightarrow \dfrac{OH}{CN} = \dfrac{OM}{MC}$

Mà $OM = CN = \dfrac{a}{2}, CM = \sqrt{BM^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

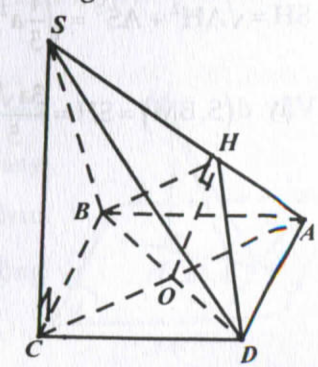
Suy ra $OH = \dfrac{CN.OM}{MC} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$, OI là đường trung bình trong tam giác SAC nên $OI = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} OI // SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OH \Rightarrow \Delta OHI$ vuông tại O

nên $IH = \sqrt{OH^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{3}{10}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Vậy $d(I, CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^0$, $SC \perp (ABCD)$ và SC = h. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SA theo a và h.



Lời giải

Kẻ $OH \perp SA, H \in SA$ thì $d(O,SA) = OH$.

Do ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 120^0$ nên ΔCBD đều cạnh $a \Rightarrow CO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CA = 2CO = a\sqrt{3}$.

$SA = \sqrt{CS^2 + CA^2} = \sqrt{h^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3a^2 + h^2}$

Hai tam giác vuông AHO va ACS đồng dạng nên

$$\frac{OH}{SC} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow OH = \frac{OA.SC}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{3a^2 + h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2 + h^2}}$$

Vậy $d(O,SA) = OH = \frac{\sqrt{3}ah}{2\sqrt{3a^2 + h^2}}$.

Ví dụ 4. . Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD .Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE .

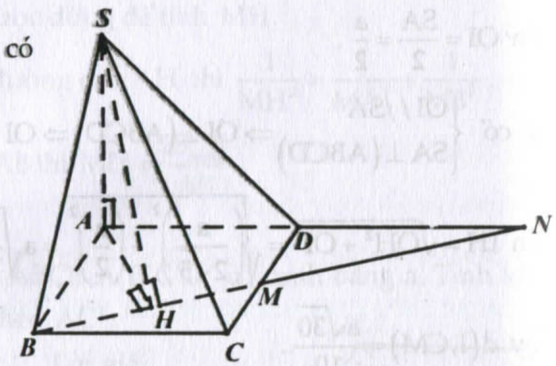
Lời giải

Trong (SBM) kẻ $SH \perp BM$ thì $d(S,BM) = SH$.

Gọi $N = BM \cap AD$, ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow \frac{DN}{BC} = \frac{MD}{MC} = 1 \Rightarrow DN = BC = a$

$\Rightarrow AN = 2a$.

Trong tam giác vuông ABN có



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AN^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AH \Rightarrow \Delta ASH$ vuông tại A, do đó

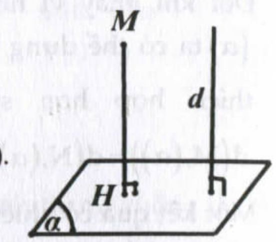
$$SH = \sqrt{AH^2 + AS^2} = \sqrt{\frac{4}{5}a^2 + a^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(S,BM) = SH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 02: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

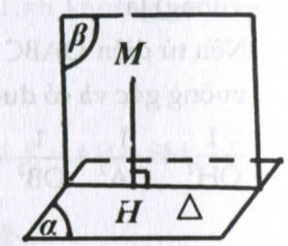
Phương pháp:

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α). Để xác định được vị trí hình chiếu này ta có một số lưu ý sau:



h1

- Nếu có $d \perp (\alpha)$ thì $MH \,//\, d$ (h1).
- Chọn (β) chứa điểm M , rồi xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$. Trong (β) dựng $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (\alpha)$ (h2).
- Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH \perp d$. Khi đó $MH \perp (\alpha)$ (h3)



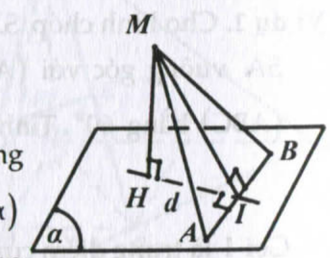
h2

Thật vậy, gọi I là trung điểm của AB. Do $MA = MB$ nên ΔMAB cân tại $M \Rightarrow MI \perp AB \subset (\alpha)$.

Lại có $AB \perp d \Rightarrow AB \perp mp(M,d)$

$\Rightarrow AB \perp MH$.

Vậy $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp d \end{cases} \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.



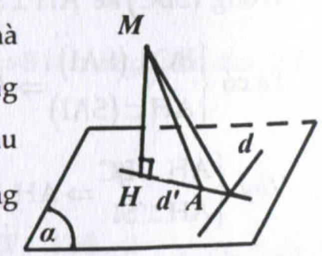
h3

- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.(*h4*)

Thật vậy , do $d \perp d'$ và $d \perp MA \Rightarrow d \perp mp(M,d') \Rightarrow d \perp MH$

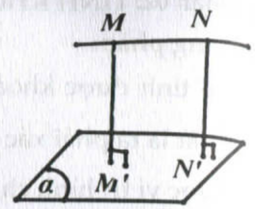
Lại có $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp mp(d,d') \equiv (\alpha)$.

- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$ mà $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.



h4

- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n \ (n \ge 3)$ mà các mặt phẳng $(MA_1A_2), (MA_2A_3), ..., (MA_nA_1)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Đôi khi, thay vì hình chiếu của điểm M xuống (α) ta có thể dựng hình chiếu một điểm N khác thích hợp hơn sao cho $MN // (\alpha)$. Khi đó $d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$. (h5)



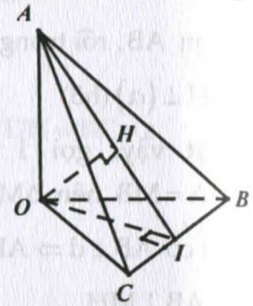
h5

d(M,(α))=d(N,(α))

- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tự như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:

Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$



CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

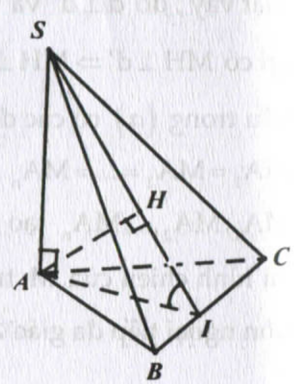
$\Rightarrow \widehat{AIS} = 60^0$.

Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2} \Rightarrow AH = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

Hay $d(A,(SBC)) = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

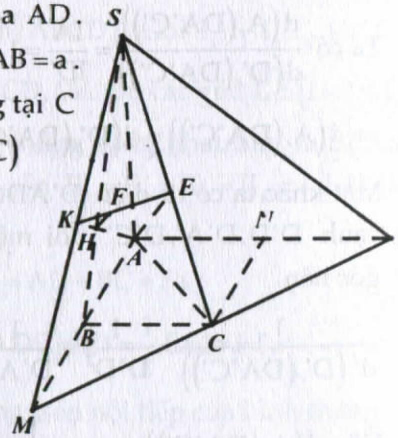
Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$.

Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD) \ (1)$



Trong (AKE) kẻ $HF // AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF$.

Do $BC // AD \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a \Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

Lại có $\frac{BH}{BS} = \frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \frac{a^2}{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$.

Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\frac{HF}{AE} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}AE$.

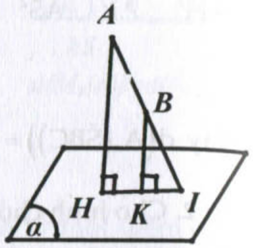
Tứ diện ADMS có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và

$AE\perp(SMD)$ nên $\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AS^2}$

$=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AE=a$.

Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD))=HF=\dfrac{1}{3}AE=\dfrac{a}{3}$.

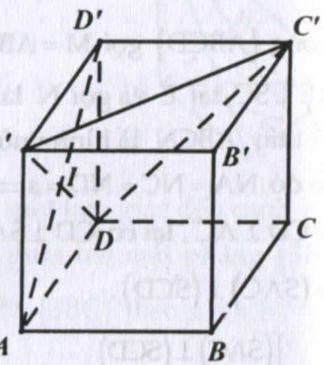
Nhận xét: Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))}=\dfrac{IA}{IB}$.



Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có ba kích thước $AB=a, AD=b, AA'=c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Lời giải

Gọi I là tâm của hình bình hành ADD'A' thì I là trung điểm của AD'.



Ta có $\dfrac{d(A,(DA'C'))}{d(D',(DA'C'))}=\dfrac{IA}{ID'}=1$

$\Rightarrow d(A,(DA'C'))=d(D',(DA'C'))$.

Mặt khác ta có tứ diện D'ADC' có các cạnh D'D, D'A', D'C' đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(D',(DA'C'))}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Vậy $d(A,(DA'C'))=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $\widehat{BAA'}=\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=60^0$. Tính khoảng cách từ A' đến (ABCD).

Lời giải

Do ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAA'}=\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=60^0$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh $a\Rightarrow A'A=A'B=A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của ΔABD).

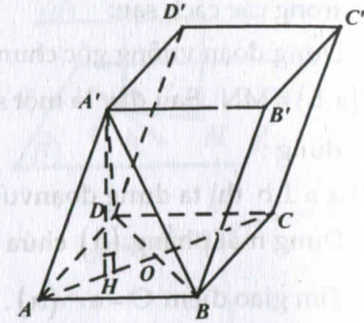
Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABCD) thì các tam giác vuông A'HA, A'HB, A'HD bằng nhau nên HA = HB = HD suy ra H là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có

$AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Vậy $d(A',(ABCD))=A'H=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng 2a, BC = 3a các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

Lời giải

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD), Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB, BC, CD, DA thì các góc $\widehat{II_iS}\ (i=1,4)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau, suy ra các tam giác vuông $SII_1, SII_2, SII_3, SII_4$ bằng nhau nên $II_1=II_2=II_3=II_4\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang ABCD.

Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp nên AB + DC = AD + BC = 5a

Diện tích hình thang ABCD là $S=\dfrac{1}{2}(AB+DC)AD=\dfrac{1}{2}.5a.2a=5a^2$

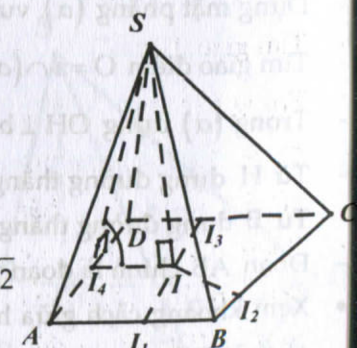
Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang ABCD thì $p=\dfrac{AB+DC+AD+BC}{2}=\dfrac{10a}{2}=5a$

$S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{5a^2}{5a}=a\Rightarrow II_4=r=a$.

Tam giác SAD đều và có cạnh 2a nên

$SI_4=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SI_4{}^2-II_4{}^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$

Vậy $d(S,(ABCD))=SI=a\sqrt{2}$.



Bài toán 03: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

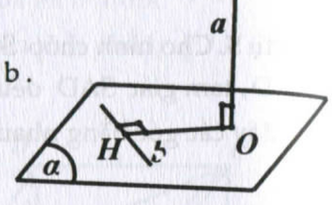
Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b)=MN$. Sau đây là một số cách dựng đoạn vuông góc chung thường dùng :

Nếu $a\perp b$ thì ta dựng đoạnvuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng $OH\perp b$.

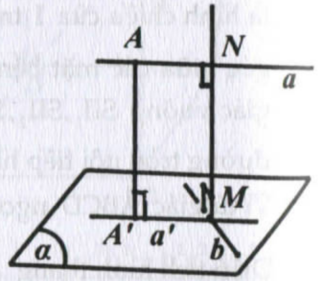
Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



Nếu a,b không vuông góc với nhau thì có thể dựng đoạn vuông góc chung của a và b theo hai cách sau:

Cách 1.

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A\in a$ trên (α).
- Trong (α) dựng đường thẳng a' đi qua A' và song song với a cắt b tại M, từ M dựng đường thẳng song song với AA' cắt a tại N. Đoạn MN chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

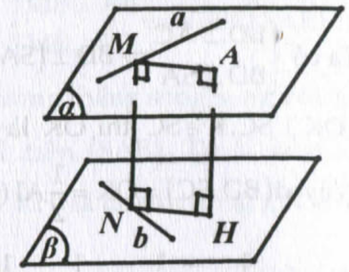


Cách 2.

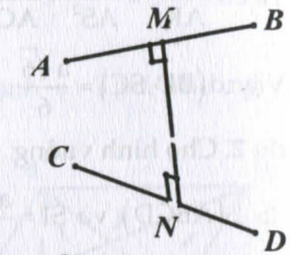
- Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$. Dựng hình chiếu b' của b trên (α)
- Trong (α) dựng $OH\perp b'$ tại H.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Đoạn AB chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

- Xem khoảng cách giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm $A\in a$ đến mặt phẳng (α) chứa b và $(\alpha)/\!/a$.

- Sử dụng $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))=d(A,(\beta)),A\in(\alpha)$
- Sử dụng phương pháp vec tơ



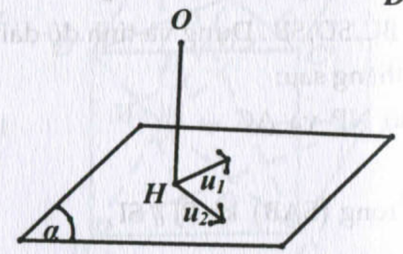
a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$



b) Nếu trong (α) có hai vec tơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ thì

$$OH=d(O,(\alpha))\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_2}\\ H\in(\alpha)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2}=0\\ H\in(\alpha)\end{cases}.$$



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

a) SB và AD. b) BD và SC.

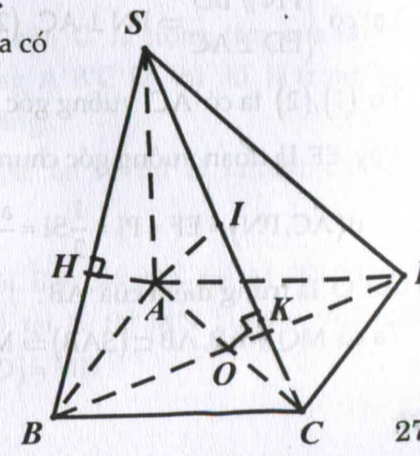
Lời giải.

a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$$\begin{cases}AD\perp AB\\ AD\perp SA\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp AH$$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB)=AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vậy $d(AD,SB)=AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và kẻ

$OK\perp SC, K\in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC)=OK=\frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

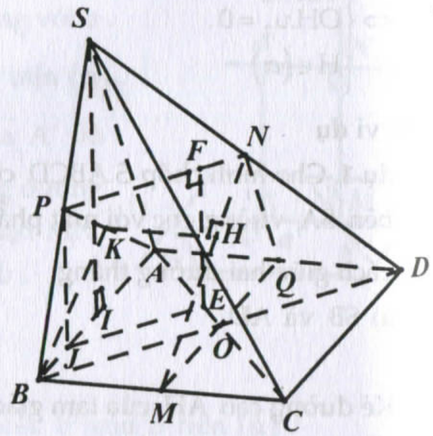
Ta có $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS\perp(ABCD)$ và $SI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.　　　　b) MN và AP.

Lời giải



a) Trong (SAB) kẻ $PJ\,//\,SI$,

từ J kẻ $JE\,//\,BD, E\in AC$

Từ E kẻ $EF\,//\,PJ, F\in PN$.

Do $\begin{cases} PJ\,//\,SI \\ SI\perp(ABCD) \end{cases}\Rightarrow PJ\perp(ABCD)$

$\Rightarrow PJ\perp AC$ (1).

Lại có $\begin{cases} PN\,//\,BD \\ BD\perp AC \end{cases}\Rightarrow PN\perp AC$ (2)

Từ (1),(2) ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF\subset(PNJ)\Rightarrow AC\perp EF$

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$$d(AC,PN)=EF=PJ=\frac{1}{2}SI=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ\,//\,AB, AB\subset(SAB)\Rightarrow MQ\,//\,(SAB)$.

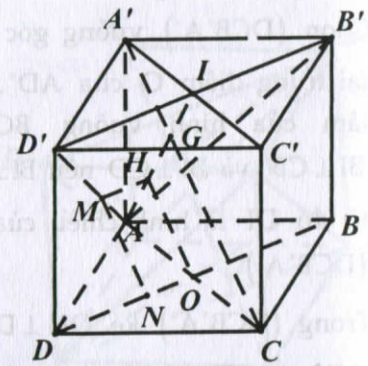
Tương tự $NQ\,//\,SA, SA\subset(SAB)\Rightarrow NQ\,//\,(SAB)$.

Vậy $(MNQ)\,//\,(SAB)\Rightarrow NM\,//\,(SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB\perp AB \\ MB\perp SI \end{cases}\Rightarrow MB\perp(SAB)\Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN,AP)=KH=MB=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải



Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Do $\begin{cases} BD\,//\,B'D' \\ AD'\subset(AB'D') \end{cases}$ nên (AB'D') là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên (AB'D').

Do $\begin{cases} B'D'\perp A'C' \\ B'D'\perp CC' \end{cases}\Rightarrow B'D'\perp(CC'A')\Rightarrow B'D'\perp A'C$ (1)

Tương tự $A'C\perp AD'$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $A'C\perp(AB'D')$. Gọi $G=A'C\cap(AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A=A'B'=A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác AB'D'. Vậy gọi I là tâm của hình vuông A'B'C'D' thì AI là trung tuyến của tam giác AB'D' nên A,G,I thẳng hàng.

Trong (ACC'A') dựng $OH\,//\,CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O\in BD$ trên (AB'D').

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD',BD)=MN$.

Dễ thấy MNOH là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

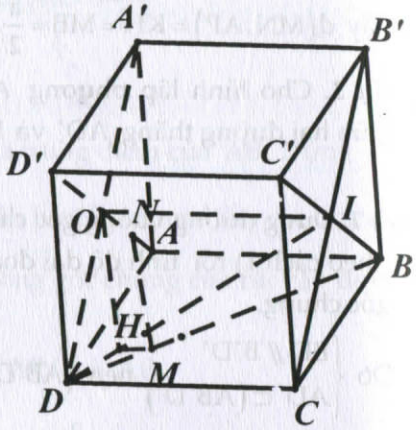
Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Chọn $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.

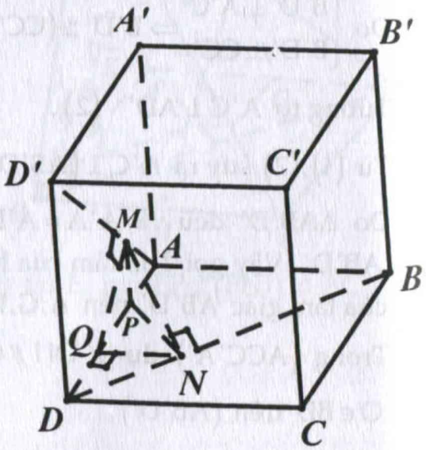


Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Ta có OHMN là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD'$, $N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$; $AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.

Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên $QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

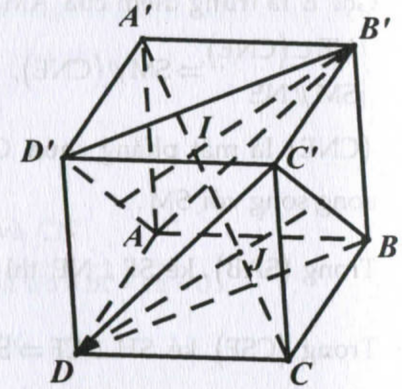
Từ đó $MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.

Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') \,//\, (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC'))$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'), (BDC')$.



Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dàng chứng minh được $A'C \perp (AB'D')$, $A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $MN \perp DB \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

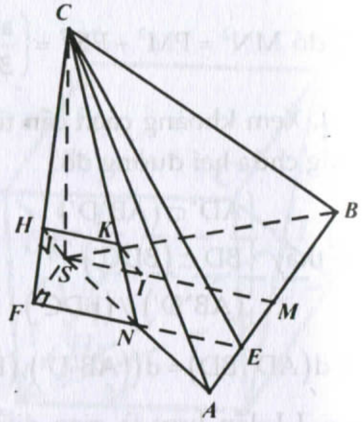
$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=0 \Leftrightarrow 1-m-2k=0$, từ đó ta có hệ $\begin{cases}2m+k=1\\ m+2k=1\end{cases} \Leftrightarrow m=k=\frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}-\frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4. Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc và SA = SB = SC = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Lời giải



Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.

Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases}NE\subset(CNE)\\ SM\,//\,NE\end{cases} \Rightarrow SM\,//\,(CNE)$, do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF\perp NE$ thì $\begin{cases}NE\perp SF\\ NE\perp CS\end{cases} \Rightarrow NE\perp(CSF)\Rightarrow(CSF)\perp(CNE)$

Trong (CSF) kẻ $SH\perp CF\Rightarrow SH\perp(CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

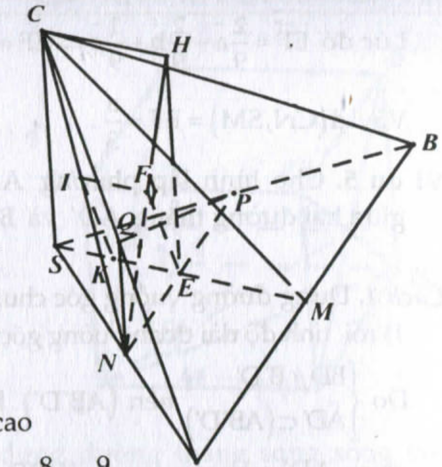
Ta có $SF=AM=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SF^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{a^2}\Rightarrow SH=\frac{a}{3}$.

Vậy $d(SM,CN)=IK=SH=\frac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM. Khi đó $NQ\,//\,CS, CS\perp(SAB)$

$\Rightarrow NQ\perp(SAB)\Rightarrow NQ\perp SM$



Lại có $SM\perp NP\Rightarrow SM\perp(NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH\Rightarrow CH\,//\,SE$, mà $SE\perp(NPQ)\Rightarrow CH\perp(NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ). Kẻ $EF\perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác vuông tại có đường cao

$\Rightarrow \frac{1}{EF^2}=\frac{1}{EH^2}+\frac{1}{EN^2}=\frac{1}{CS^2}+\frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a^2}=\frac{9}{a^2}$.

$\Rightarrow EF=\frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM)=IK=EF=\frac{a}{3}$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN.

Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=a$ và $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}=0$.

EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN

$$\Leftrightarrow\begin{cases}E\in SM\\ F\in CN\\ EF\perp SM\\ EF\perp CN\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{SE}=x\overrightarrow{SM}\\ \overrightarrow{CF}=y\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM}=0\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN}=0\end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{SE}=\vec{c}+y\overrightarrow{CN}-x\overrightarrow{SM}$

$$=\vec{c}-\frac{x}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)=\frac{1}{2}(y-x)\vec{a}-\frac{1}{2}x\vec{b}+(1-y)\vec{c}.$$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM}=0\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y=0\\ -x+5y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{9}\\ y=\frac{8}{9}\end{cases}$

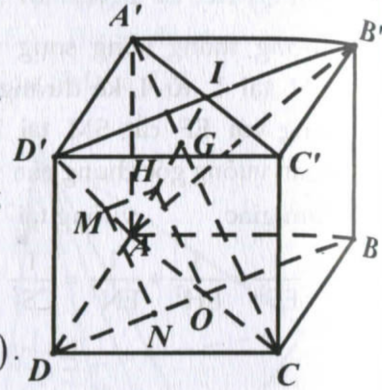
Vậy đường vuông góc chung của SM và CN là đường thẳng EF với

$\overrightarrow{SE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{SM},\overrightarrow{CF}=\frac{8}{9}\overrightarrow{CN}$.

Lúc đó $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{9}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}\Rightarrow EF=\sqrt{\frac{4}{81}\vec{a}^2+\frac{4}{81}\vec{b}^2+\frac{4}{81}\vec{c}^2}=\frac{a}{3}$.

Vậy $d(CN,SM)=EF=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.



Lời giải

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Do $\begin{cases}BD \,//\, B'D'\\ AD'\subset(AB'D')\end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases}B'D'\perp A'C'\\ B'D'\perp CC'\end{cases}\Rightarrow B'D'\perp(CC'A')\Rightarrow B'D'\perp A'C$ (1)

Tương tự $A'C\perp AD'$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $A'C\perp(AB'D')$. Gọi $G=A'C\cap(AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A=A'B'=A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A,G,I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH\,//\,CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O\in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD',BD)=MN$.

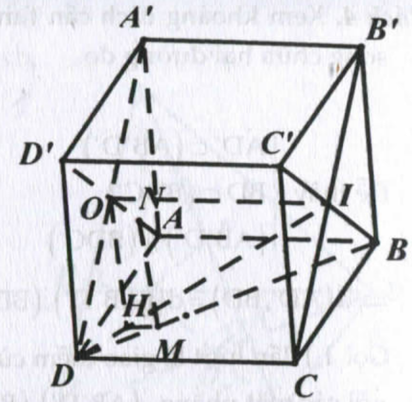
Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN=OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG\Rightarrow OH=\frac{1}{2}CG$.

Mặt khác $\frac{GC}{GA'}=\frac{AC}{A'I}=2\Rightarrow CG=2GA'\Rightarrow CG=\frac{2}{3}CA'=\frac{2}{3}a\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH=\frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD',BD)=MN=OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Chọn $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI\perp CB'$ và $BI\perp CD$ nên $BI\perp(DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.

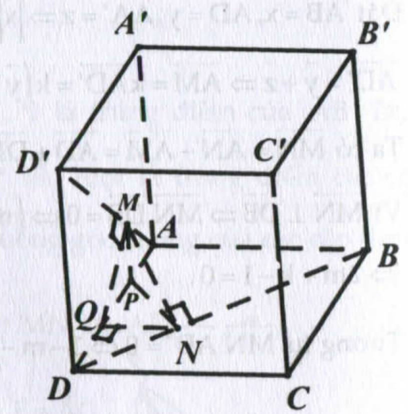
Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH\perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD',BD)=MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN=OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OD^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(AD',BD)=MN=OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M\in AD'$, $N\in BD$. Từ M kẻ $MP\perp AD$, từ N kẻ $NQ\perp AD$.



Dễ thấy $BD\perp(MNP)\Rightarrow BD\perp NP$;

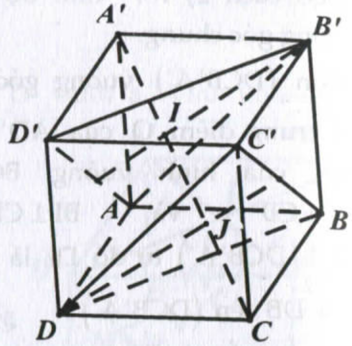
$AD'\perp(MNQ)\Rightarrow AD'\perp MQ$.

Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên $QD=QN=QP=MP=PA=\frac{a}{3}$

Lại có $PN=\frac{DP}{\sqrt{2}}=\frac{2a}{3\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó $MN^2=PM^2+PN^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{a^2}{3}\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') // (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC'))$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của A'C với các mặt phẳng $(AB'D'),(BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác AB'D' và (BDC').

Mặt khác dễ dàng chứng minh được $A'C \perp (AB'D'), A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

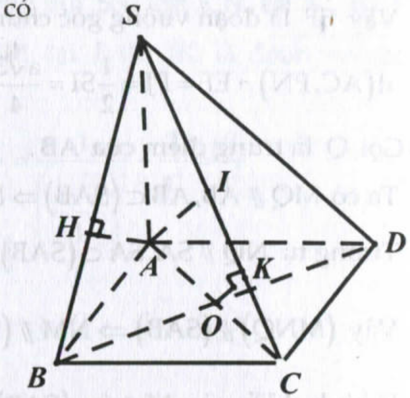
Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ $\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

a) SB và AD. b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

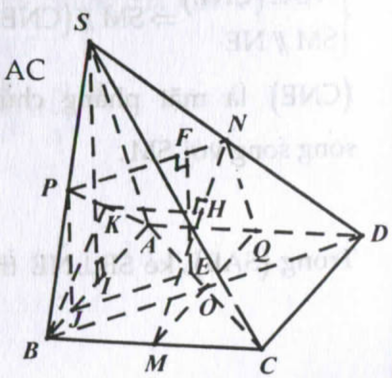
Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 7. Cho hình vuông ABCD cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SD, SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC. b) MN và AP.

Lời giải



a) Trong (SAB) kẻ PJ // SI, từ J kẻ JE // BD, $E \in AC$

Từ E kẻ EF // PJ, $F \in PN$.

Do $\begin{cases} PJ // SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

$\Rightarrow PJ \perp AC$ (1).

Lại có $\begin{cases} PN // BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC$ (2).

Từ (1),(2) ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC,PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ \,//\, AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ \,//\, (SAB)$.

Tương tự $NQ \,//\, SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ \,//\, (SAB)$.

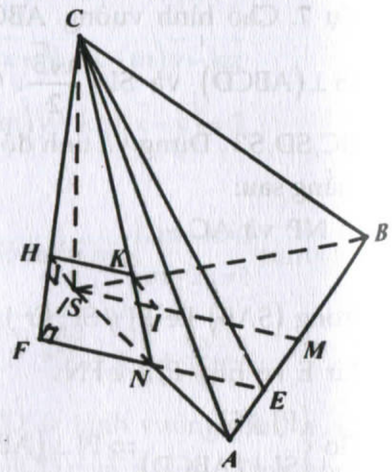
Vậy $(MNQ) \,//\, (SAB) \Rightarrow NM \,//\, (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN,AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện SABC có SA,SB,SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Lời giải

Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.



Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM \,//\, NE \end{cases} \Rightarrow SM \,//\, (CNE)$, do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì $\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$

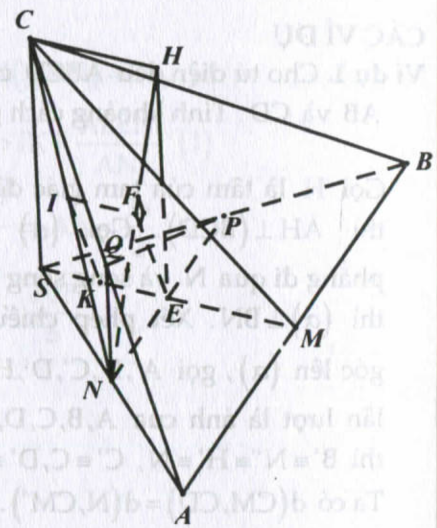
Trong (CSF) kẻ $SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

Ta có $SF = AM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SF^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(SM,CN) = IK = SH = \frac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.

Khi đó $NQ \,//\, CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH \,//\, SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$,

Vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ). Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}$.

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

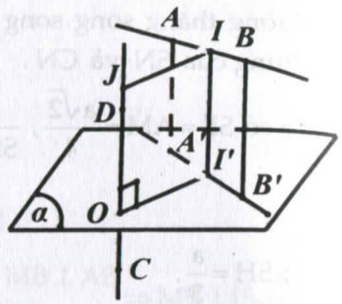
Bài toán 04: ỨNG DỤNG PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O. Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I \in AB, J \in CD$)

Xét phép chiếu vuông góc lên (α). Gọi A', B', I' là hình chiếu của A, B, I thì $IJ = OI'$, từ đó $d(AB, CD) = d(O, A'B')$.



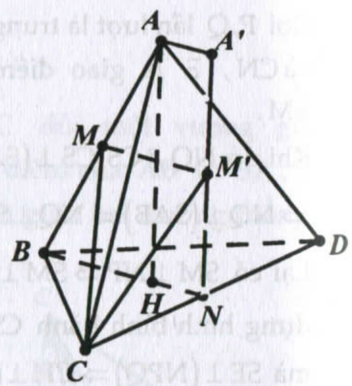
Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH \perp (BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha) \perp BN$. Xét phép chiếu vuông góc lên (α), gọi $A', B', C', D', H', M', N'$ lần lượt là ảnh của A, B, C, D, H, M, N thì $B' \equiv N' \equiv H' \equiv N$, $C' \equiv C, D' \equiv D$.



Ta có $d(CM, CD) = d(N, CM')$.

$$BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$NM' = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Tam giác NCM' vuông tại N nên

$$\frac{1}{d^2(N, CM')} = \frac{1}{CN^2} + \frac{1}{NM'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{10}{a^2} \Rightarrow d(N, CM') = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d(CM, BN) = d(N, CM') = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Lời giải

Gọi E là trung điểm của BC.

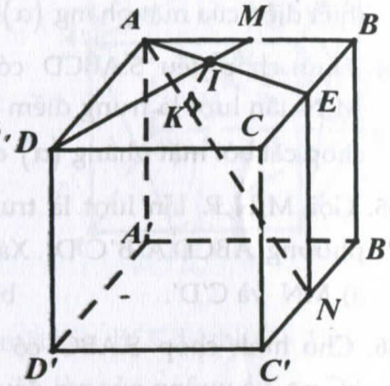
Dễ thấy $\Delta ADM = \Delta BAE$ nên $\widehat{AMD} = \widehat{AEB}$,

mà $\widehat{AEB} + \widehat{BAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMD} + \widehat{BAE} = 90^0$

$\Rightarrow DM \perp AE$. Lại có $EN \perp (ABCD)$

$\Rightarrow EN \perp DM$ do đó $(AEN) \perp DM$ tại I.

Xét phép chiếu vuông góc lên (ANE), ta có AN chính là hình chiếu của nó nên $d(DM, AN) = d(I, AN)$



Gọi K là hình chiếu của I trên AN thì $d(I, AN) = IK$.

Ta có $\Delta AKI \sim \Delta AEN$, suy ra $\dfrac{IK}{EN} = \dfrac{AI}{AN} \Rightarrow IK = \dfrac{AI.EN}{AN}$ (1)

$$AN^2 = AE^2 + EN^2 = AB^2 + BE^2 + EN^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow AN = \frac{3a}{2}.$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Thay vào (1) ta được $IK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d(DM, AN) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP CHƯƠNG

81. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Mặt phẳng $(A'MC)$ cắt cạnh $C'D'$ tại N.

a) Tứ giác $A'MCN$ là hình gì? Chứng minh $MN \perp CB'$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên MN. Tìm tập hợp điểm H.

82. Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc và các điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba tia đó sao cho $OA = OB + OC = 1$.

a) Chứng minh tổng diện tích tất cả các mặt của tứ diện $OABC$ không đổi.

b) Tính tổng các góc $\widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB}$.

83. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của cạnh AB. Tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với B'C.

84. Hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua MN song song với SB.

85. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, C'D' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

a) MN và C'D'. b) BD và AD'. c) MN và AP.

86. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{2}a$. Cạnh $SC = a$ và vuông góc với đáy. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng CD và SE.

87. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc với nhau và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh:

a) Tam giác OAB là tam giác tù.

b) Chứng minh khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N di động.

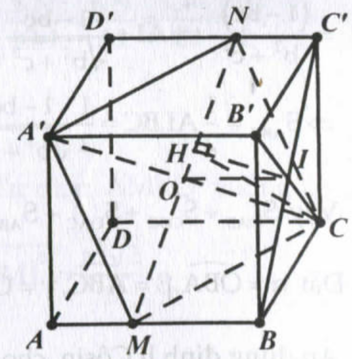
88. Cho tứ diện ABCD có $AD = b, BC = c$ và các cạnh còn lại bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

b) Tìm điểm M trên IJ sao cho $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

89. Cho tứ diện D.ABC. Gọi A'B'C' theo thứ tự là các điểm trên DA, DB, DC sao cho $DA'.DA = DB'.DB = DC'.DC$, H là trực tâm của tam giác A'B'C' và I là giao điểm của DH với mặt phẳng (ABC). Một điểm M di động trong tam giác ABC, đường thẳng Δ đi qua M cùng phương (song song hoặc trùng) với ID lần lượt cắt các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) tại MNQ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ



81. a) Ta có $\begin{cases}(ABB'A') // (CDD'C')\\ (A'MB)\cap(ABB') = A'M\\ (A'MB)\cap(CDD'C') = CN\end{cases}$

$\Rightarrow A'M // CN$

Tương tự $CM // A'N$, do đó A'MCN là hình bình hành.

Dễ thấy $CB' \perp (ABC'D')$ mà $MN \subset (ABC'D')$ nên $CB' \perp MN$.

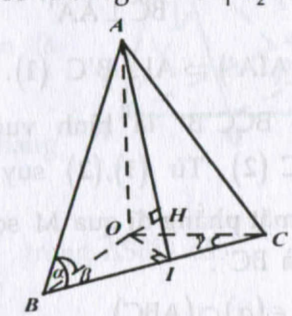
b) Gọi O là tâm của hình hộp và I là tâm của mặt bên BCC'B' thì $O \in MN$.

Ta có $\begin{cases}MN \perp CI\\ MN \perp CH\end{cases} \Rightarrow MN \perp (CIH) \Rightarrow IH \perp MN$ Trong $(ABC'D')$ đường thẳng MN đi qua điểm O cố định và điểm H nhìn đoạn OI dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính OI.

Gọi $H_1 = AC' \cap (\zeta), H_2 = BD' \cap (\zeta)$ với (ζ) là đường tròn đường kính OI trong $(ABC'D')$.

Từ đó ta lập luận được tập hợp các điểm H là cung tròn $\overset{\frown}{H_1H_2}$.

82. a) Đặt $OB = b, OC = c$ thì $b + c = 1$



$S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC}$

$= \frac{1}{2}OAOB + \frac{1}{2}OB.OC + \frac{1}{2}OC.AO$

$= \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}bc$

Gọi I là hình chiếu của O trên BC và H là hình chiếu của O trên (ABC).

Ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$= \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} \Rightarrow OI^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$.

Do đó $AI^2 = OI^2 + OA^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} + 1 = \frac{b^2 + c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{(b + c)^2 - 2bc + b^2c^2}{b^2 + c^2}$

$=\frac{(1-bc)^2}{b^2+c^2} \Rightarrow AI=\frac{1-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ (do $0<bc<1$)

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=\frac{1}{2}\frac{1-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\sqrt{b^2+c^2}=\frac{1}{2}(1-bc)$.

Vậy $S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAC}+S_{ABC}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}(1-bc)=1$ không đổi.

b) Đặt $\alpha=\widehat{OBA},\beta=\widehat{ABC},\gamma=\widehat{OCB}$.

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác ABC ta có $\cos\beta=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA.BC}$

$=\frac{OB^2+OC^2+OA^2+OB^2-(OA^2+OC^2)}{2BA.BC}=\frac{OB^2}{BA.BC}$

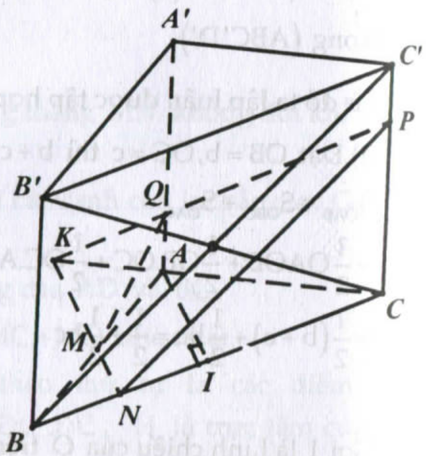
$=\frac{OB(OA-OC)}{BA.BC}=\frac{OA.OB}{BA.BC}-\frac{OB.OC}{BA.BC}=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=\cos(\alpha+\gamma)$

$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=180^0$. Vậy $\widehat{OBA}+\widehat{ABC}+\widehat{OCB}=180^0$.

83. Tam giác ABC vuông tại A và $AB=AC=a\Rightarrow BC=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC thì $\begin{cases}BC\perp AI\\ BC\perp AA'\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(AIA')\Rightarrow AI\perp B'C$ (1).

Dễ thấy BCC'B' là hình vuông nên $BC'\perp B'C$ (2). Từ (1),(2) suy ra (α) chính là mặt phẳng đi qua M song song với AI và BC'.



Ta có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ABC)\\ AI\,//\,(\alpha)\\ AI\subset(ABC)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MN\,//\,AI, N\in BC$.

Tương tự $(\alpha)\cap(BCC'B')=NP\,//\,B'C, P\in CC'$.

Gọi $K=AC\cap MN, Q=PK\cap AA'$. Thiết diện là tứ giác MNPQ.

$S_{td}=S_{KNP}-S_{KMQ}=S_{KMQ}\left(\frac{S_{KNP}}{S_{KMQ}}-1\right)=S_{KMQ}\left(\frac{KN}{KM}.\frac{KP}{KQ}-1\right)$.

Do M là trung điểm của AB và KN // AI nên $\frac{KN}{KM}=\frac{KN}{AI}=\frac{CN}{CI}=\frac{3}{2}$.

Tương tự $QA\,//\,CC'\Rightarrow\frac{KP}{KQ}=\frac{KC}{KA}=\frac{NC}{NI}=3$.

$AQ=\frac{1}{3}NC=\frac{1}{3}\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $AK=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$. Tứ diện AMKQ vuông tại A

nên $S_{KMQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(OM.OK)^2+(OK.OQ)^2+(OQ.OM)^2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

Từ đó ta có $S_{td}=\frac{7a^2\sqrt{2}}{16}$

Chú ý: Có thể dùng phép chiếu vuông góc lên mp (ABC) để tính diện tích thiết diện MNPQ.

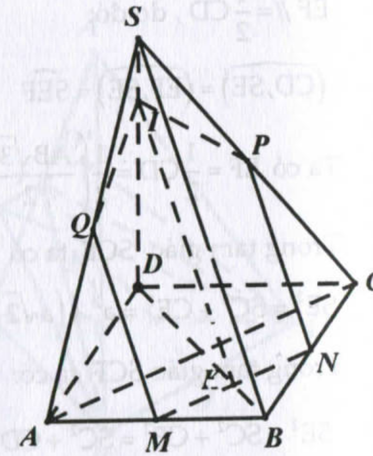
84. Gọi $K=MN\cap BD$.

$\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(SAB)\\ SB\subset(SAB)\\ SB\,//\,(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MQ\,//\,SB, Q\in SA$

Tương tự $(\alpha)\cap(SBC)=NP\,//\,SB, P\in SC$

$(\alpha)\cap(SBD)=KI\,//\,SB, I\in SD$. Thiết diện là ngũ giác MNPIQ.



Dễ thấy MKIQ và NKIP là hai hình thang vuông có diện tích bằng nhau, do đó

$S_{td}=(MQ+IK)MK$. Ta có $MQ=\frac{1}{2}SB=\frac{b}{2}$, trong ΔSBD có:

$\frac{IK}{SB}=\frac{DK}{BD}=\frac{\frac{3}{4}BD}{BD}=\frac{3}{4}\Rightarrow IK=\frac{3}{4}SB=\frac{3b}{4}$, $MK=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

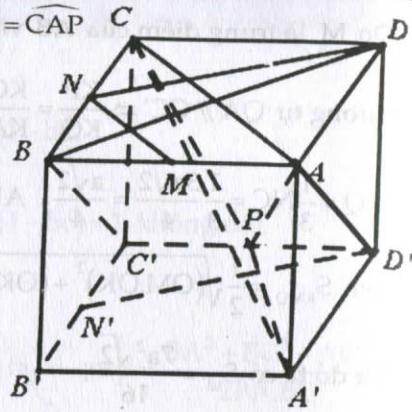
Từ đó ta có $S_{td}=\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.

85. a) Do C'D' // AB nên $(MN,C'D')=(MN,AB)=\widehat{BMB}=45^0$

b) Ta có AD' // BC' nên $(BD,AD')=(BD,BC')=\widehat{DBC'}$

Dễ thấy tam giác BDC' đều nên $\widehat{DBC'}=60^0$.

c) Ta có $MN \parallel AC$ nên $\left(\widehat{MN,AP}\right)=\left(\widehat{AC,AP}\right)=\widehat{CAP}$



Dễ thấy $AC=a\sqrt{2}, CP=\frac{a\sqrt{5}}{2}, Ap=\frac{3a}{2}$

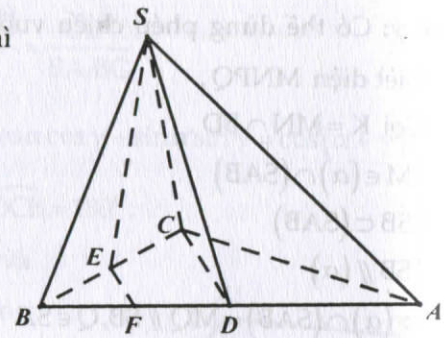
$$\cos\widehat{CAP}=\frac{AC^2+AP^2-CP^2}{2AC.AP}$$

Do đó

$$=\frac{2a^2+\frac{9a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\frac{3a}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \widehat{CAP}=45^0$. Vậy $\left(\widehat{MN,Ap}\right)=45^0$.

86. Gọi F là trung điểm của BD thì



$EF \mathbin{/\!\!/\!\!=} \frac{1}{2}CD$, do đó:

$\left(\widehat{CD,SE}\right)=\left(\widehat{EF,SE}\right)=\widehat{SEF}$

Ta có $EF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\left(\frac{AB\sqrt{3}a}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}a}{2}$

Trong tam giác SCE ta có

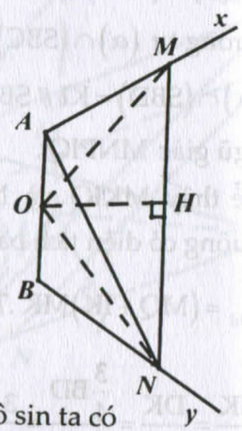
$SE^2=SC^2+CE^2=a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=3a^2$

Trong tam giác SCF ta có:

$SE^2=SC^2+CF^2=SC^2+CD^2+DF^2=\frac{15a^2}{2}$

Do đó $\cos\widehat{SEF}=\frac{SE^2+EF^2-SF^2}{2SE.EF}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \widehat{SEF}=135^0$

$\Rightarrow \left(\widehat{CD,SE}\right)=45^0$.



87. a) Đặt $x=AM, y=BN$ và $AB=a$. Áp dụng định lí cô sin ta có

$$\cos\widehat{MON}=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}$$

$$=\frac{x^2+\frac{a^2}{2}+y^2+\frac{b^2}{2}-(x+y)^2}{2OM.ON}=\frac{a^2-4xy}{2OM.ON}$$

Do $AM\perp AB$ và $BN\perp AM$ nên $AM\perp AN$, do đó:

$MN^2=AM^2+AN^2=AM^2+BN^2+AB^2$

$\Rightarrow (x+y)^2=x^2+y^2+a^2\Rightarrow 2xy=a^2$

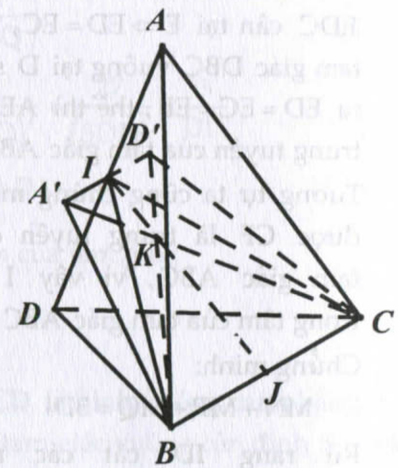
$\Rightarrow \cos\widehat{MON}=\frac{-a^2}{2OM.ON}<0$. Vậy tam giác MON tù.

b) Kẻ $OH\perp MN, H\in MN$. Ta chứng minh $OH=\frac{AB}{2}$. Thật vậy, giả sử $OH>OA$. Khi đó xét các tam giác MOA, MOH ta có $MH<AM$ và xét các tam giác NOB và NOH ta có $NH<BN$, suy ra $MN<AM+BN$ (mâu thuẫn giả thiết).

Tương tự $OH<OA$ cũng mâu thuẫn giả thiết.

Vậy $OH=OA$, hay $OH=\frac{AB}{2}$ không đổi.

88.



a) Tam giác ABD cân tại B có I là trung điểm của AD nên $BI\perp AD$. Tương tự $CI\perp AD\Rightarrow AD\perp(IBC)$

$\Rightarrow AD\perp IJ$. Do vai trò bình đẳng giữa AD và BC nên $IJ\perp BC$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

b) Dựng hình thang BCD'A' sao cho I,J lần lượt là trung điểm của hai đáy A'D', BC và $IA'=IA, ID'=ID$.

Ta thấy với điểm M tùy ý trên IJ thì $MA=MA', MD=MD'$ nên:

$$MA+MB+MC+MD=MA'+MB+MC+MD'$$

$$=(MA'+MC)+(MD'+MB)\ge A'C+D'B.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M=A'C\cap D'B$.

Ta có $IJ^2=DJ^2-ID^2=DC^2-JC^2-ID^2=a^2-\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$

$\Rightarrow IJ=\frac{\sqrt{2a^2-b^2-c^2}}{2}$.

$BD'^2=\left(\frac{BC+A'D'}{2}\right)^2+IJ^2=a^2+\frac{bc}{2}\Rightarrow BD'=\sqrt{a^2+\frac{bc}{2}}$

Vậy $\min(MA+MB+MC+MD)=2BD'=\sqrt{4a^2+2bc}$

89.

I là trọng tâm của tam giác ABC.

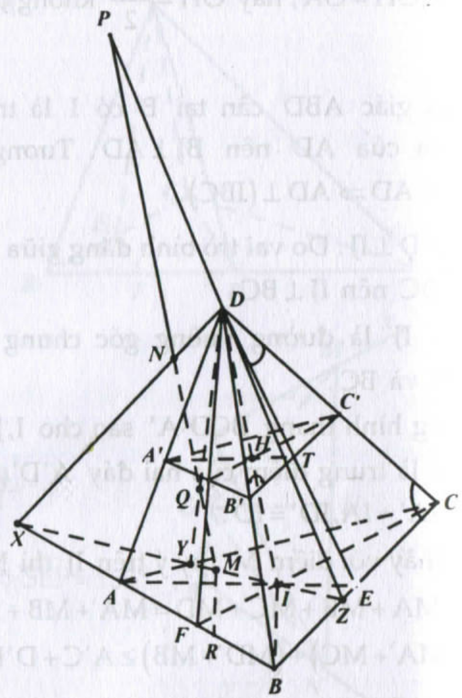
Gọi T là giao điểm của $A'H$ với $B'C'$, E,F lần lượt là các giao điểm của AB và BC; CI và AB. Dễ thấy D,T,E thẳng hàng (thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (IAD) và (DBC)). Do H là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $A'I \perp B'C'$, mặt khác theo giả thiết $DA \perp DB$ và $DA \perp DC$ nên $DA \perp (DBC) \Rightarrow DA \perp B'C'$; do đó $B'C' \perp (DA'T) \Rightarrow B'C' \perp DT$.

Ta có $\widehat{C'DT} + \widehat{B'DT} = 90^0$ và $\widehat{DB'T} + \widehat{B'DT} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C'DT} = \widehat{DB'T}$ (1)

Mặt khác tứ giác $BCC'D'$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{DB'T} = \widehat{C'CB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EDC cân tại $E \Rightarrow ED = EC$, mà tam giác DBC vuông tại D suy ra $ED = EC = EB$, thế thì AE là trung tuyến của tam giác ABC.

Tương tự ta cũng chứng minh được CF là trung tuyến của tam giác ABC, vì vậy I là trọng tâm của tam giác ABC.



Chứng minh:

$$MN + MP + MQ = 3DI$$

Rõ ràng ID cắt các mặt $(DAB),(DBC),(DAC)$ tại D nên đường thẳng qua M cùng phương với ID chắc chắn cắt các mặt $(DAB),(DBC),(DCA)$.

Gọi X,Y,Z lần lượt là các giao điểm của IM với các cạnh AB,AC,BC (Lưu ý là nếu IM song song với một cạnh nào đó của tam giác ABC thì ta vẫn dễ dàng dựng được các giao điểm của đường thẳng Δ với các mặt các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$)

Ta có N,P,Q theo thứ tự là các giao điểm của DX,DZ,DY với Δ.

Kẻ $MR \parallel IB$, thì $\dfrac{MN}{ID} = \dfrac{XM}{XI} = \dfrac{MR}{IB} = \dfrac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta IBC}} = \dfrac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$ (do I là trọng tâm của tam giác ABC nên $S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{MP}{ID} = \dfrac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, \dfrac{MQ}{ID} = \dfrac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}$.

Do đó $\dfrac{MN}{ID} + \dfrac{MP}{ID} + \dfrac{MQ}{ID} = \dfrac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} + \dfrac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} + \dfrac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}} = 3 \Leftrightarrow MN + MP + MQ = 3DI$

Theo BĐT Cau chy ta có

$$T = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ}\right)^2$$

$$\ge \frac{1}{3}.\frac{81}{(MN + MP + MQ)^2} = \frac{27}{(3DI)^2} = \frac{3}{DI^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$ (khi đó $N,P,Q \equiv D$)

Vậy $\min T = \dfrac{3}{DI^2}$ khi M trùng với trọng tâm của tam giác.

ÔN TẬP & KIỂM TRA

90. Cho hình chóp S.ABCD S.ABCD, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều , mặt SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh rằng SI vuông góc với (SCD) , SJ vuông góc với (SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên IJ. Chứng minh rằng SH vuông góc với AC.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA. Tính AM theo a.

91. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh SA vuông góc $(ABCD)$ và tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB,CD lần lượt tại I,J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC. Hãy xác định

các giao điểm K, L của SB, SD với mặt phẳng (HIJ). Chứng minh rằng AK vuông góc (SBC), AL vuông góc (SCD).

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

92. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ nằm trong một mặt phẳng (P). Dựng đoạn $AS = 2R$, AS vuông góc (P). Gọi T là một điểm di động trên tiếp tuyến của đường tròn tại A. Đặt $\alpha = \widehat{ABT}\left(0 < \alpha < 90^0\right)$. Đường thẳng BT gặp lại đường tròn (O) tại M. Gọi N là hình chiếu vuông góc của A lên SM.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện SAMB đều là các tam giác vuông.

b) Chứng minh rằng khi T di động, đường thẳng TN luôn đi qua một điểm cố định H.

c) Tính α để tam giác AHN cân.

93. Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a. SA vuông góc với (ABC) và $SA = a$. Gọi M là một điểm tùy ý trên cạnh AC $(M \neq A, M \neq C)$, mặt phẳng α qua M và vuông góc với AC.

a) Tùy theo vị trí của điểm M trên cạnh AC, xác định thiết diện tạo bởi α với tứ diện S.ABC.

b) Đặt $CM = x(0 < x < a)$. Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x. Định x để diện tích S lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

94. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc (ABCD) và $SA = a$.

a) Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b) Hãy dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

c) Tính khoảng cách từ tâm O của hình vuông ABCD đến mặt phẳng (SBC).

d) Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

95. Trong mặt phẳng α cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 60^0$. Dựng hai đoạn $BB' = a, CC' = 2a$ cùng vuông góc với mặt phẳng α và ở cùng một bên đối với α. Tính khoảng cách từ

a) C′ đến mặt phẳng (ABB′).

b) Trung điểm của B′C đến mặt phẳng (ACC′).

c) B′ đến mặt phẳng (ABC′).

d) Trung điểm của BC đến mặt phẳng (AB′C′).

96. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với (ABCD) và $SA = a$.

1) Tìm trên mặt phẳng (ABCD) một điểm cách đều ba điểm S, B, C và tính khoảng cách chung ấy và khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (SBC).

2) Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B, C, M với M là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách chung ấy.

97. Cho hình vuông ABCD tâm O; S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

1) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng SB.

2) Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D trong tam giác vuông SDC.

98. Cho tam giác đều ABC; S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC).

1) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A lên SB.

2) Gọi N là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC). Chứng minh rằng đường thẳng SN qua trung điểm của đoạn BC. Tìm tập hợp các điểm N.

3) Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Chứng minh rằng BK ở trong một mặt phẳng cố định. Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của A lên BK.

99. Cho tam giác đều ABC nằm trong mặt phẳng (P). Gọi Bx và Cy là hai tia cùng chiều và cùng vuông góc với (P). Cho M, N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy. Tìm tập hợp chân H của đường cao AH của tam giác AMN khi M, N di động thỏa một trong các điều kiện dưới đây:

1) $BM = \frac{1}{2}CN$.

2) $BM + CN = 2a$ (a là độ dài không đổi).

3) $BM = CN$.

100. Trong mặt phẳng (P) cho góc vuông $\widehat{xOy}$; d là một đường thẳng cố định trong (P), d cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi Oz là tia vuông

góc với (P), S là một điểm trên Oz. Gọi AE, BF là các đường cao của tam giác SAB.

1) Cho góc $\widehat{xOy}$ cố định, S di động trên tia Oz. Tìm tập hợp các điểm E và F.

2) Cho S cố định và S khác O, góc $\widehat{xOy}$ quay quanh O. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác SAB cố định. Tìm tập hợp các điểm E và F.

101. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C), đường kính AB; SA vuông góc với (P). Gọi M là một điểm di động trên đường tròn (C), H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (SMB). Tìm tập hợp các điểm H.

102. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S.

1) Cho S di động trên tia Ax. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SBC).

2) Cho S cố định, M là một điểm di động trên đoạn AC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SMB).

103. Cho tứ diện $S.ABC$ có SI vuông góc với mặt phẳng (ABC) (I là trung điểm của cạnh AB). M là một điểm di động trên cạnh SC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABM).

104. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (γ) tâm O; A là một điểm cố định trên (γ) và BC là một dây cung di động của (γ) luôn vuông góc với OA. Trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại A lấy một điểm cố định S khác A. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC).

105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh bằng a, $\widehat{ABC}=60^0$, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=a$. Gọi M là một điểm trên cạnh SB.

1) Khi M là trung điểm của cạnh SB, tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (ADM).

2) Khi M di động trên cạnh SB. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ADM).

106. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $BCC'B'$ hợp với $(ABB'A')$ góc 30^0.

1) Tính AA'

2) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến mặt phẳng $(BA'C')$.

3) Gọi N là trung điểm của cạnh BB'. Tính góc giữa MN và mặt phẳng $(BA'C')$.

107. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của $B'C'$ có độ dài bằng a, MN hợp với mặt phẳng (ABC) góc α và hợp với mặt $(BCC'B')$ góc β.

1) Tính độ dài các cạnh đáy và cạnh bên của hình lăng trụ theo a và α.

2) Chứng minh rằng $\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$.

108. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O, $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

1) Chứng minh rằng $\widehat{ASC}$ vuông,

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD),

3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

109. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân với $AB=AC=a$, DBC là tam giác đều, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng 30^0, góc $\widehat{AED}$ là góc nhọn (E là trung điểm của BC).

1) Tính AD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (ABD) và (CBD), b) (BAD) và (CAD).

110. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng HS vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

1) Tính SH và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

2) Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh CK vuông góc với SD và tính góc giữa hai mặt phẳng (SDA) và (SDC).

3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SKC).

111. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại O lấy điểm S sao cho $OS = R$. Gọi M, N là hai điểm trên (C); a và b là hai tiếp tuyến của (C) tại M và N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (S, a) và (S, b) trong mỗi trường hợp sau:

1) M và N là hai điểm xuyên tâm đối,

2) $\widehat{MON} = 90^0$.

112. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông với cạnh huyền $BC = 2a$; $AB = a$; các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) cùng hợp với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60^0; hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC.

1) Chứng minh H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính SH.

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

113. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Hai mặt bên SAB và SCD lần lượt vuông tại A và C và nằm trong hai mặt phẳng cùng hợp với mặt phẳng (ABCD) góc α. Các góc $\widehat{SAC}$, $\widehat{SCA}$ là các góc nhọn. Biết $\widehat{ABC} = \varphi$.

1) Chứng minh SO vuông góc với (ABCD).

2) Chứng minh hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) cùng hợp với (ABCD) một góc β thỏa mãn hệ thức : $\cot\beta = \cot\alpha.\cot\varphi$.

114. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy ABC vuông cân đỉnh A, $BC = 2a$, AA′ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (AB′C) và (BB′C′C) có số đo bằng α.

1) Chứng minh $AA' = \dfrac{2a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}$.

2) Chứng minh rằng góc giữa hai mặt phẳng (AB′C) và (A′B′C) có số đo bằng $\pi - 2\alpha$.

115. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB vuông tại O, $AB = 2a$, $OB = a$. Trên các tia vuông góc với (P) vẽ từ A và B và ở về cùng một bên đối với (P), ta lấy $AA' = a$, $BB' = x$.

1) Định x để tam giác OA′B′ vuông tại O.

2) Tính A′B′, OA′, OB′ theo a và x. Chứng tỏ tam giác OA′B′ không thể vuông tại B′. Định x để tam giác này vuông tại A′.

3) Cho $x = 4a$. Vẽ đường cao (OAC) của tam giác OAB. Chứng minh rằng CA′ vuông góc với A′B′. Tính góc giữa hai mặt phẳng (OA′B′) và (P).

116. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều cạnh a, AA′ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AA' = 2a$. Gọi D là trung điểm của cạnh BB′, M là một điểm di động trên cạnh AA′.

1) Chứng minh giao tuyến d của hai mặt phẳng (ABC) và (MC′D) qua một điểm cố định.

2) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của C′ lên d khi M di động trên cạnh AA′. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MC′D.

117. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên AB và CD.

1) Chứng minh mặt phẳng (SIJ) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

2) Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng hợp với mặt phẳng (ABCD) góc α, còn SC hợp với (ABCD) góc β. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

118. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; I là trung điểm của cạnh AB; IO cắt BC tại K.

1) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau là $\widehat{ISK} = 90^0$.

2) Biết bán kính của đường tròn (ABC) là R; $SO = 2R$; $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau là tam giác ABC có ba góc nhọn và $\tan\alpha.\tan\beta = \dfrac{5}{4}$.

119. Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SC và SB; M là một điểm trên cạnh AB, đặt $AB = x$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAB).

1) Xác định rõ mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện theo a và x.

2) Gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên (P). Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên cạnh AB.

120. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với (ABCD), $SA = a$. Gọi E là trung điểm của SA, M là một điểm trên cạnh AD với $AM = x$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAD).

1) Xác định rõ (P).

2) (P) cắt hình chóp đã cho theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

3) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của D lên (P) khi M di động trên cạnh AD.

121. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với (ABCD) và $SA = a$. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

1) (P) qua tâm O của đáy ABCD, trung điểm M của SD và vuông góc với (ABCD).

2) (P) qua A, trung điểm N của CD và vuông góc với (SBC).

122. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh bằng a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, A'C', C'B'$. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng

1) DE và AB'; 2) $A'B$ và $B'C'$; 3) DE và $A'F$.

123. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

1) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

2) Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

3) Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

125. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = 2a$.

1) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và từ C đến mặt phẳng (SBD).

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

3) Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác BCFE.

126. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A ta lấy một điểm M. Gọi H và O lần lượt là trực tâm của hai tam giác ABC và MBC.

1) Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (MBC).

2) Tìm tập hợp điểm O khi M di động trên (d).

3) Đường thẳng OH cắt (d) tại N. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối vuông góc.

4) Chứng minh AM.AN không đổi. Tính AM, AN để độ dài MN nhỏ nhất.

127. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C), đường kính $AB = 2R$, M là một điểm di động trên (C). Dựng $SA = 2R$ và SA vuông góc với (P). Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của các tam giác SAB và SAM.

1) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAM) vuông góc với mặt phẳng (SBM).

2) Chứng minh tứ giác BHKM nội tiếp được và giao điểm T của HK và BM ở trên một đường thẳng cố định.

3) Đặt góc $\widehat{BAM} = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm giá trị của α để diện tích tam giác AHK lớn nhất.

128. Cho hình vuông ABCD nằm trong mặt phẳng (P). Vẽ tia Ax vuông góc với (P), M là một điểm trên Ax. Đường thẳng qua M, vuông góc với mặt phẳng (MBC) cắt (P) tại R, đường thẳng qua M, vuông góc với (MCD) cắt (P) tại S.

1) Chứng minh: A, B, R thẳng hàng và A, D, S thẳng hàng.
2) Tìm tập hợp trung điểm I của RS khi M di động trên tia Ax.
3) Gọi AH là đường cao của tam giác AMI. Chứng minh AH vuông góc với mặt phẳng (MRS) và H là trực tâm của tam giác MRS.

129. Cho tam giác đều ABC có chiều cao $AH = 3a$. Lấy điểm O trên AH sao cho $AO = a$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O lấy điểm S sao cho $OS = BC$.

1) Chứng minh BC vuông góc với SA và tính SO, SA, SH theo a.
2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).
3) Qua điểm I trên đoạn OH, dựng mặt phẳng α vuông góc với OH, α cắt các đoạn AB, SB, SC, AC lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.
4) Tính diện tích MNPQ theo a và $x = AI$. Xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

130. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính $AB = 2R$. Trên tia Ax vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho $\widehat{SBA} = 30^0$; M là một điểm trên (C). Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$

1) Tính tổng các bình phương các cạnh của tứ diện S.ABM theo R và α.
2) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và AM theo R và α.
3) Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với SB tại H, cắt SM tại N, tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên (C).
4) Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SMB). Chứng minh rằng $\tan\alpha.\tan\beta = 2$

131. Cho hình thang vuông ABCD có đáy lớn $AD = 2a$, đáy nhỏ $BC = a$ và $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là một điểm trên đường chéo $AC(M \neq A, M \neq C)$, đặt $AM = x$. Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AC. Tùy theo vị trí của M trên đoạn AC, hãy xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với (P). Tính diện tích của thiết diện này theo a và x. Xác định x để thiết diện có diện tích lớn nhất.

132. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O bán kính R; AB là một dây cung di động của (C); I là trung điểm của AB. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại O lấy điểm S.

1) Chứng minh mặt phẳng (SOI) vuông góc với mặt phẳng (SAB).
2) Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O lên (SAB) khi AB di động nhưng luôn luôn cùng phương với một đường thẳng cố định.
3) Đặt $AB = 2x\ (0 \le x \le R), SO = h$. Tính x để diện tích tam giác SAB lớn nhất.

133. Tứ diện ABCD có $AD = a\sqrt{2}$, các cạnh khác đều bằng a, DH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H.

1) Chứng minh rằng ABH và ACH là các tam giác vuông bằng nhau và các mặt phẳng (DBC) và (ADH) vuông góc với nhau.
2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADB) và (ADC).
3) Mặt phẳng qua H và vuông góc với AD cắt AD, BD và CD lần lượt tại A'B'C'. Tính AH, DH, DB' và chứng minh rằng tứ giác HB'A'C' là hình vuông.

134. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}, AC = 2a\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Các đỉnh S, A, C cố định; đỉnh B di động nhưng hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) luôn vuông góc với nhau; AD AE lần lượt là đường cao của các tam giác SAC và SAB.

1) Chứng minh các tam giác ABC và SBC vuông và AE vuông góc với mặt phẳng (SBC).
2) Tính góc $\widehat{BAC}$ để khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAC) lớn nhất.
3) Giả sử DE cắt BC tại M và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SBC) tại D cắt mặt phẳng (ABC) tại N. Chứng tỏ A, M, N thẳng hàng và tích AM.AN không đổi. Định góc $\widehat{BAC}$ để MN có độ dài nhỏ nhất.

135. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và vuông góc với nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $AC = 2OB$ và $BC = 2OA$. Đặt $a = OA$.

1) Tính OB, OC theo a.

2) Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AC và BC. Chứng minh MN vuông góc với OC.

3) Tính $\cos\widehat{MON}$

4) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\dfrac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1$

136. Hình chóp OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ

1) Chứng minh hệ thức $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

2) H là trực tâm tam giác ABC. Các cạnh OA, OB, OC hợp với OH các góc α', β', γ'. Chứng minh rằng: $2\left(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'\right) = \sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = 2$

Đẳng thức trên còn đúng nữa không nếu H là một điểm tùy ý trên mặt phẳng (ABC).

3) Đặt $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}$ và h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{S}{h^2}$

137. Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Từ các điểm B, C, D vẽ các tia By, Cz, Dt cùng vuông góc với (P) và cùng chiều. Trên By, Dt lần lượt lấy các điểm B′, D′ với $BB' = DD' = x$. Mặt phẳng (AB′D′) cắt Cz tại C′.

1) Chứng minh mặt phẳng (AB′D′) chứa một đường thẳng cố định khi x thay đổi.

2) Tứ giác AB′C′D′ là hình gì? Tính theo a và x độ dài CC′ và diện tích tứ giác AB′C′D′.

3) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (AB′C′D′). Tính tanφ và cosφ theo a và x. Tính $\tan\dfrac{\widehat{B'AD'}}{2}$ theo cosφ.

4) Tính x để AB′C′D′ là hình vuông.

138. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Từ B và C dựng hai tia Bx, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho $BM + CN = 2k$ (k là độ dài cho trước).

1) Chứng minh mặt phẳng (AMN) chứa một đường thẳng cố định.

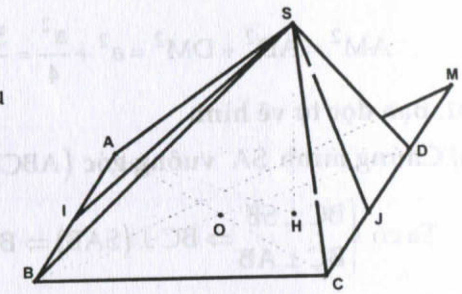
2) Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (AMN). Tìm tập hợp các điểm H.

3) Định vị trí của MN để tam giác AMN có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

90.

a.Tính các cạnh của tam giác SIJ.



SI là đường cao của tam giác đều SAB cạnh bằng a, suy ra $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SCD vuông cân tại S, SJ là trung tuyến, suy ra $SI = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

$IJ = AD = a$.

Chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.

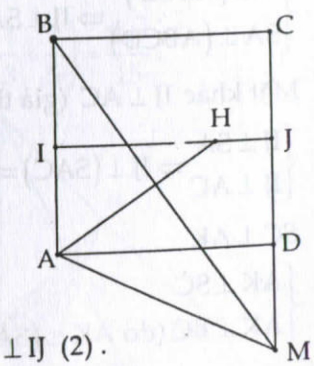
Xét tam giác SIJ, ta có $SI^2 + SJ^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại

$S \Rightarrow SI \perp SJ. \begin{cases} SI \perp AB \\ CD \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp CD$

$\begin{cases} SI \perp SJ \\ SI \perp CD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (SCD)$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $SJ \perp (SAB)$.

b.Chứng minh SH // AC.



Ta có $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp SJ \text{ (do } SJ \perp (SAB)) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow AB \perp SH$ (1) (vì $SH \subset (SIJ)$)

H là hình chiếu vuông góc của S lên IJ nên $SH \perp IJ$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $SH \perp (ABCD)$.

c. Tính AM.

Vì $BM \subset (ABCD)$ nên $BM \perp SH$ do đó $BM \perp SA \Leftrightarrow BM \perp AH$.

Xét tam giác vuông SIJ, ta có $SI^2 = IH.IJ \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = IH.a \Rightarrow IH = \frac{3a}{4}$.

Hai tam giác vuông AIH và BCM có $\hat{I} = \hat{C} = 1v, \widehat{HAI} = \widehat{MBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABM}$) nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{IH}{CM} = \frac{AI}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CM = 2IH = \frac{3a}{2} \Rightarrow DM = CM - CD = \frac{a}{2}$$

Xét tam giác vuông ADM

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

91. Bạn đọc tự vẽ hình

a) Chứng minh SA vuông góc $(ABCD)$ và tính SA.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA.$

Chứng minh tương tự, ta có $CD \perp SA$.

$\begin{cases} SA \perp BC \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$

Tam giác SAD vuông tại A (do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$)

$\Rightarrow SA^2 = SD^2 - AD^2 = 5a^2 - 3a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

b. Xác định các điểm K, L. Chứng minh rằng $AK \perp (SBC), AL \perp (SCD)$.

$K = SB \cap (HIJ) = SB \cap HI, L = SD \cap (HIJ) = SD \cap HJ$.

$\begin{cases} IJ \subset (ABCD) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow IJ \perp SA$

Mặt khác $IJ \perp AC$ (giả thiết)

$\begin{cases} IJ \perp SA \\ IJ \perp AC \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$. Lại có $AH \perp SC$, do đó $SC \perp (HIJ)$, suy ra $SC \perp AK$

$\begin{cases} AK \perp SC \\ AK \perp BC \text{ (do } AK \subset (SAB), BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC).$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AL \perp (SCD)$.

c. Diện tích tứ giác AKHL.

$AK(SBC) \Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K.

Xét tam giác vuông SAB (vuông tại A), AK là đường cao, suy ra

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Xét tam giác vuông SAC (vuông tại A), AH là đường cao, suy ra

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \begin{cases} SA = a\sqrt{2} \\ AC^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$KH^2 = AH^2 - AK^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow KH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_{AHK} = \frac{1}{2}AK.KH = \frac{1}{2}\frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3}.$$

Xét tam giác vuông SAD, ta có

$$AL.SD = SA.AD \Rightarrow AL = \frac{SA.AD}{SD} = \frac{a^2\sqrt{6}}{a\sqrt{5}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}$$

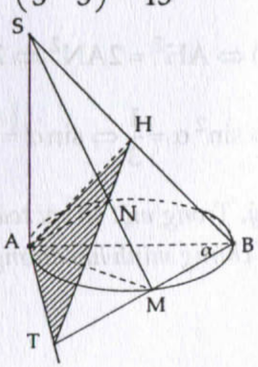
Xét tam giác vuông ALH (vuông tại L)

$$HL^2 = AH^2 - AL^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{6a^2}{5} = \frac{2a^2}{15} \Rightarrow HL = a\sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$S_{AHL} = \frac{1}{2}AL.HL = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{6}{5}}.a\sqrt{\frac{2}{15}} = \frac{a^2}{5}$$

Diện tích tứ giác AKHL: $S_{AKHL} = S_{AHK} + S_{AHL} = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8a^2}{15}$.

92.



a. Chứng minh các mặt của tứ diện SAMB đều là các tam giác vuông.

Tam giác AMB nội tiếp trong nửa đường tròn (O) nên tam giác AMB vuông tại M.

$SA \perp (AMB) \Rightarrow SA \perp AM, SA \perp AB$

$\Rightarrow$ các tam giác SAM, SAB vuông tại A.

$\begin{cases} BM \perp MA \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp SM \Rightarrow \Delta SMB$ vuông tại M.

Vậy các mặt của tứ diện SAMB là các tam giác vuông.

b. Chứng minh đường thẳng TN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi H là giao điểm của TN với SB, ta có

$\begin{cases} AN \perp SM \\ AN \perp MB \ (\text{do } MB \perp (SAM), AN \subset (SAM)) \end{cases}$

$\Rightarrow AN \perp (SMB) \Rightarrow AN \perp SB$

$\begin{cases} AT \perp AB \\ AT \perp SA \end{cases} \Rightarrow AT \perp (SAB) \Rightarrow AT \perp SB$

$\begin{cases} SB \perp AN \\ SB \perp AT \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ATN),\ AH \subset (ATN) \Rightarrow SB \perp AH$

H là hình chiếu vuông góc của A lên SB nên H cố định. Vậy TN đi qua điểm cố định H (H là trung điểm của SB do tam giác SAB vuông cân tại S).

c. Tính α để tam giác AHN cân.

$AN \perp (SMB), NH \subset (SMB) \Rightarrow AN \perp NH \Rightarrow \Delta ANH$ vuông tại N

Do đó ΔANH cân $\Leftrightarrow \Delta ANH$ vuông cân tại $N \Leftrightarrow AH = AN\sqrt{2}$ (*)

$AH = \frac{1}{2}SB = R\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông AMB, ta có $AM = AB\sin\widehat{ABN} = 2R\sin\alpha$

Trong tam giác vuông SAM, AN là đường cao, do đó

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{4R^2\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1}{4R^2\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow AN^2 = \frac{4R^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

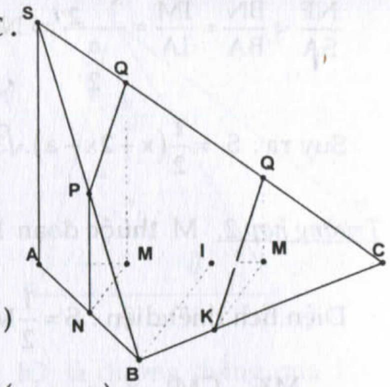
$$(*) \Leftrightarrow AH^2 = 2AN^2 \Leftrightarrow 2R^2 = \frac{8R^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \sin^2\alpha = 4\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Chú ý. *Trong một số bài toán, ta có thể sử dụng tính chất sau:* $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ *để chứng minh hai đường thẳng vuông góc một cách gọn gàng hơn.*

93.

a. Xác định thiết diện của α với tứ diện S.ABC.



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$.

Gọi I là trung điểm của AC, vì tam giác ABC đều nên $BI \perp AC$.

$\begin{cases} \alpha \perp AC \\ SA \perp AC, BI \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \parallel SA \\ \alpha \parallel BI \end{cases}$.

<u>Trường hợp 1</u>: M thuộc đoạn AI ($M \neq A, M \neq I$)

$\begin{cases} M \in \alpha \cap (ABC) \\ \alpha \parallel BI, BI \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap (ABC) = MN \parallel BI\ (N \in AB)$.

Tương tự $\alpha \cap (SAB) = NP \parallel SA\ (P \in SB)$, $\alpha \cap (SAC) = MQ \parallel SA\ (Q \in SC)$.

α và (SBC) có hai điểm chung là P, Q nên $\alpha \cap (SBC) = PQ$.

Vậy thiết diện là tứ giác MNPQ.

Vì $MQ \parallel NP$ (cùng song song SA), $MQ \perp (ABC) \Rightarrow MQ \perp MN$, suy ra MNPQ là hình thang vuông tại M và N.

<u>Trường hợp 2.</u> M thuộc đoạn $IC (M \neq C)$.

Giải tương tự như trên, thiết diện là tam giác QMK (K thuộc cạnh BC) vuông tại M.

b. Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x.

<u>Trường hợp 1.</u> M thuộc đoạn AI $\left(\frac{a}{2} < x < a\right)$.

Diện tích thiết diện : $S = \frac{1}{2}(NP + MQ).MN$.

Áp dụng định lí Ta-let, ta có:

$$\frac{MN}{BI} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow MN = \frac{BI.AM}{AI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.(a-x)}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}(a-x)$$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = \frac{ax}{a} = x.$$

$$\frac{NP}{SA}=\frac{BN}{BA}=\frac{IM}{IA}=\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\Rightarrow NP=2x-a.$$

Suy ra : $S=\frac{1}{2}(x+2x-a).\sqrt{3}(a-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x)$.

Trường hợp 2. M thuộc đoạn IC $\left(0<x\le\frac{a}{2}\right)$

Diện tích thiết diện : $S=\frac{1}{2}MK.MQ$

$$\frac{MK}{BI}=\frac{CM}{CI}=\frac{x}{\frac{a}{2}}\Rightarrow MK=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2x}{a}=x\sqrt{3}$$

Suy ra : $S=\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}$.

Vậy diện tích thiết diện : $S=\begin{cases}\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} & \left(0<x\le\dfrac{a}{2}\right)\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(3x-a) & \left(\dfrac{a}{2}<x<a\right)\end{cases}$

Định x để diện tích S lớn nhất

Nếu $x\in\left(\frac{a}{2};a\right)$ thì $S=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x)=\frac{\sqrt{3}}{6}(3x-a)(3a-3x)$.

Mặt khác với $x\in\left(\frac{a}{2};a\right)$ thì $3x-a>0, 3a-3x>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $S\le\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{3x-a+3a-3x}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

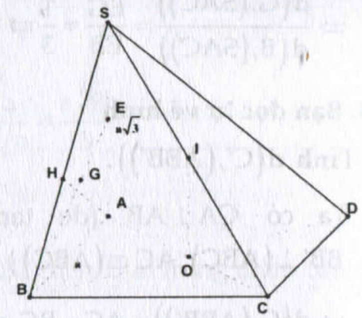
Nếu $x\in\left(0;\frac{a}{2}\right]$ thì $S=\frac{x^2\sqrt{3}}{2}\le\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Vì $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\le\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ và $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\frac{a}{2};a\right)\\3x-a=3a-3x\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

Vậy $\max S=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi và chi khi $x=\frac{2a}{3}$.

94.

a. **Dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).**



Gọi I là trung điểm của SC, O là giao điểm của AC và BD thì O là trung điểm của hai đoạn này.

Trong tam giác SAC, IO là đường trung bình do đó IO // SA

Mà $SA\perp(ABCD)$ suy ra $IO\perp(ABCD)$. Vậy IO là đường thẳng qua I và vuông góc (ABCD).

b. **Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC).**

Dựng $AH\perp SB\,(H\in SB)$, ta có :

$$\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH.$$

$$\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp SB\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC).$$

Vậy AH là đường thẳng qua A vuông góc với (SBC).

Tính $d(A,(SBC))$.

Tam giác SAB vuông tại A (do $SA\perp AB$) cho:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}.$$

$$\Rightarrow d(A,(SBC))=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. **Tính $d(O,(SBC))$.**

Đường thẳng AO cắt (SBC) tại C suy ra

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{CO}{CA}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{1}{2}d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

d. **Tính $d(G,(SAC))$.**

$$\begin{cases}BO\perp AC\\BO\perp SA\end{cases}\Rightarrow BO\perp(SAC)\Rightarrow d(B,(SAC))=BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

BG cắt SA tại trung điểm E của SA $\Rightarrow\{E\}=BG\cap(SAC)$

$$\Rightarrow \frac{d(G,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{EG}{EB}=\frac{1}{3}\Rightarrow d(G,(SAC))=\frac{1}{3}d(B,(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

95. Bạn đọc tự vẽ hình

a. Tính $d(C',(ABB'))$.

Ta có $CA\perp AB$ (do tam giác ABC vuông tại A), $AC\perp BB'$ (do $BB'\perp(ABC), AC\subset(ABC)$), suy ra $AC\perp(ABB')$

$\Rightarrow d(C,(ABB'))=AC=BC.\cos 60^0=a$.

$CC'/\!/BB'\Rightarrow CC'/\!/(ABB')\Rightarrow d(C',(ABB'))=d(C,(ABB'))=a$.

b. Tính $d(M,(ACC'))$ (M là trung điểm của $B'C$).

$$\begin{cases}BA\perp AC\\ BA\perp CC'\ (\text{do } CC'\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow BA\perp(ACC')$$

$\Rightarrow d(B,(ACC'))=BA=BC\sin 60^0=a\sqrt{3}.$

$BB'/\!/CC'\Rightarrow d(B',(ACC'))=d(B,(ACC'))=a\sqrt{3}$.

$$B'M\cap(ACC')=\{C\}\Rightarrow\frac{d(M,(ACC'))}{d(B,(ACC'))}=\frac{CM}{CB'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(M,(ACC'))=\frac{1}{2}d(B'(ACC'))=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. Tính $d(B',(ABC'))$.

Trước hết ta tính $d(C,(ABC'))$.

Dựng $CH\perp AC'$ $(H\in AC')$, ta có $CH\subset(ACC')\Rightarrow CH\perp AB$.

$$\begin{cases}CH\perp AC'\\ CH\perp AB\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABC')\Rightarrow CH=d(C,(ABC'))$$

Tam giác vuông ACC′ cho : $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{4a^2}$.

$\Rightarrow CH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tứ giác BCC′B′ là hình thang vuông tại B và C nên $B'C$ và BC' cắt nhau tại E thì E cũng là giao điểm của $B'C$ và (ABC') suy ra

$$\frac{d(B',(ABC'))}{d(C,(ABC'))}=\frac{EB'}{EC}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(B',(ABC'))=\frac{1}{2}d(C,(ABC'))=\frac{1}{2}CH=\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}$$

d. Tính $d(I,(AB'C'))$ (I là trung điểm của BC).

Gọi $\{L\}=BC\cap B'C'$, vì $BB'/\!/CC'$ và $BB'=\frac{1}{2}CC'$ nên B là trung điểm của CL .

Trước hết ta tính $d(B,(AB'C'))$.

Dựng $BN\perp AL$ $(N\in AL)$, dựng $BK\perp B'N\,(K\in B'N)$, ta có:

$$\begin{cases}AL\perp BN\\ AL\perp BB'\ (\text{do } AL\subset(ABC), BB'\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow AL\perp(BB'N)\Rightarrow AL\perp BK.$$

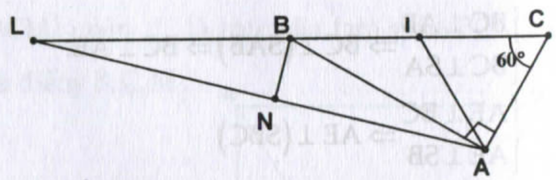
$$\begin{cases}BK\perp AL\\ BK\perp B'N\\ AL\cap B'N=\{N\}\\ AL\subset(AB'C'), BL\subset(AB'C')\end{cases}\Rightarrow BK\perp(AB'C')\Rightarrow BK=d(B,(AB'C'))$$

Định lí hàm số cosin trong tam giác ACL cho

$AL^2=CL^2+CA^2-2CL.CA.\cos 60^0$

$=(4a)^2+a^2-2(4a).a.\frac{1}{2}$

$=13a^2$



$\Rightarrow AL=a\sqrt{13}$.

Diện tích tam giác BLA .

$$S=\frac{1}{2}BN.AL=\frac{1}{2}BL.BA.\sin\widehat{LBA}=a.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(\text{do }\widehat{LBA}=180^0-\widehat{ABC}=150^0\right)$$

$$\Rightarrow BN=\frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{13}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$$

Tam giác vuông B′BN cho :

$$\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{BB'^2}=\frac{13}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow BK=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

BI cắt $(AB'C')$ tại L suy ra

$$\frac{d\left(I,(AB'C')\right)}{d\left(B,(AB'C')\right)}=\frac{LI}{LB}=\frac{3}{2}\Rightarrow d\left(I,(AB'C')\right)=\frac{3}{2}.d\left(B,(AB'C')\right)=\frac{3a\sqrt{3}}{8}.$$

Nhận xét. Trong bài toán trên các khoảng cách được tính trung gian qua khoảng cách từ một điểm khác với yêu cầu của bài toán và để tìm được các điểm trung gian này ta phải tìm các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng có sẵn trên hình vẽ. Chẳng hạn

* Ở câu a) thì đã có sẵn đường thẳng $CA\perp(ABB')$ do đó ta tính $d\left(C,(ABB')\right)$.
* Ở câu b thì đã có $BA\perp(ACC')$ nên ta tính $d\left(B,(ACC')\right)$.
* Ở câu c) vì đã có sẵn đường thẳng CC' qua C và vuông góc với đường thẳng AB chứa trong (ABC') nên ta tính $d\left(C,(ABC')\right)$ trước.

96.

a. Tìm trên mặt phẳng $(ABCD)$ một điểm cách đều ba điểm S,B,C

Gọi I là điểm cần tìm, $IS=IB=IC\Rightarrow I\in$ trục d của tam giác SBC, mặt khác I thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ do đó I là giao điểm của d và mặt phẳng $(ABCD)$.

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB$, lại có $SA=AB=a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của SB thì $AE\perp SB$

$$\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AE.$$

$$\begin{cases}AE\perp BC\\ AE\perp SB\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SBC)$$

$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại B.

Gọi F là trung điểm của SC thì F là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SBC.

EF là đường trung bình của tam giác SBC nên $EF\,//\,BC\,//\,AD$ và $EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$.

Gọi I là trung điểm của AD thì $EF\,//\,AI$ và $EF=AI$ nên tứ giác $AIFE$ là hình bình hành

$\Rightarrow FI\,//\,AE\Rightarrow FI\perp(SBC)\left(\text{do } AE\perp(SBC)\right)$.

Mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SBC nên FI là trục của tam giác SBC, hơn nữa $I\in(ABCD)$.

Vậy điểm cần tìm là trung điểm I của AD.

Tính các khoảng cách.

Tam giác vuông ABI cho: $IB^2=AB^2+AI^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow IB=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $IS=IC=IB=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$d\left(I,(SBC)\right)=IF=AE=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\text{do } SB=a\sqrt{2}\right)$.

b. Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B,C,M.

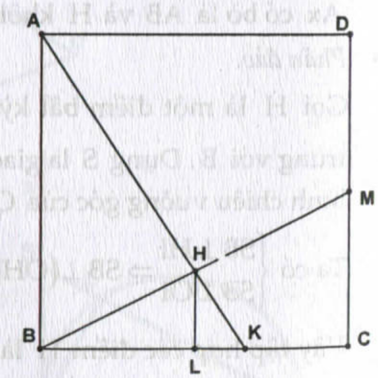
Điểm cần tìm là giao điểm của (SBC) với trục của tam giác BCM.

Gọi H là trung điểm của BM thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông BCM.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, AH cắt BC tại K. Trong mặt phẳng (SAK), dựng đường thẳng d' qua H song song với SA cắt SK tại G, ta có:

* $G\in(SBC)\left(\text{do } SK\subset(SBC)\right)$.
* Đường thẳng d' qua tâm H của đường tròn (BCM) và vuông góc với (BCM) (do $d'\,//\,SA$, $SA\perp(BCM)$) nên d' là trục của tam giác BCM, G thuộc d' do đó G cách đều ba điểm B,C,M.

Vậy G là điểm cần tìm.



Tính GB.

Gọi L là trung điểm của BC, ta có HL là đường trung bình trong tam giác $BCM\Rightarrow HL\,//\,CM$ và $HL=\frac{1}{2}CM\Rightarrow HL\,//\,AB$,

$HL=\frac{1}{4}AB\Rightarrow\frac{HL}{AB}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{4}$

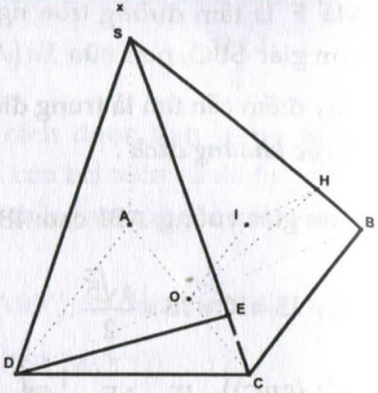
Trong tam giác SAK, $HG\,//\,SA\Rightarrow\frac{HG}{SA}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{4}\Rightarrow HG=\frac{a}{4}$.

Tam giác vuông GHB cho

$$GB^2=HG^2+BH^2=\frac{a^2}{16}+\frac{1}{4}\left(BC^2+CM^2\right)=\frac{a^2}{16}+\frac{1}{4}.\frac{5a^2}{4}=\frac{6a^2}{16}\Rightarrow GB=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

97.

1. ***Tập hợp hình chiếu vuông góc của*** **O** ***lên đường thẳng*** **SB.**



- *Phần thuận.*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SB và I là trung điểm của AB, ta có

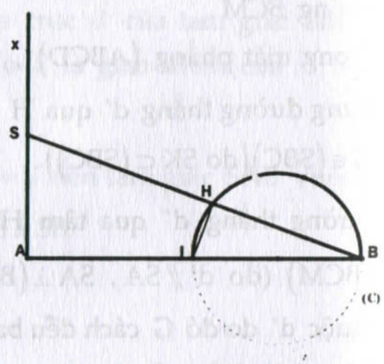
$\begin{cases} OI \perp AB \\ OI \perp Ax \end{cases} \Rightarrow OI \perp (B, Ax) \Rightarrow OI \perp SB.$

$\begin{cases} SB \perp OI \\ SB \perp OH \end{cases} \Rightarrow SB \perp IH \Rightarrow \widehat{IHB} = 90^0.$

Trong mặt phẳng cố định (B,Δ) (Δ *là đường thẳng chứa tia* Ax), $\widehat{IHB} = 90^0$ suy ra H di động trên đường tròn (C) đường kính IB.

- *Giới hạn .*

H là giao điểm thứ hai của SB với (C).



Khi $S \equiv A$ thì $H \equiv I$.

Khi S chạy về vô cực trên tia Ax thì H chạy về B.

Khi S di động trên tia Ax thì S di động trên nửa đường tròn (C) nằm trong nửa mặt phẳng (B,Δ) chứa tia Ax có bờ là AB và H không trùng B.

- *Phần đảo.*

Gọi H là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (C) nói trên , H không trùng với B. Dựng S là giao điểm của BH với tia Ax, ta chứng minh H là hình chiếu vuông góc của O lên SB.

Ta có $\begin{cases} SB \perp HI \\ SB \perp OI \end{cases} \Rightarrow SB \perp (OHI) \Rightarrow SB \perp OH.$

Vậy tập hợp các điểm H là nửa đường tròn (C) nằm trong nửa mặt phẳng (B,Δ) chứa tia Ax, có bờ là AB ,loại bỏ điểm B.

2. ***Tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh*** **D** ***trong tam giác vuông*** **SDC.**

- *Phần thuận.*

Gọi E là chân đường cao vẽ từ D trong tam giác SDC.

$\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC) \Rightarrow DO \perp SC.$

$\begin{cases} SC \perp DO \\ SC \perp DE \end{cases} \Rightarrow SC \perp (DOE) \Rightarrow SC \perp OE.$

Trong mặt phẳng (C,Δ) , $\widehat{OEC} = 90^0$ suy ra E thuộc đường tròn (C') đường kính OC.

- *Giới hạn .*

E là giao điểm thứ hai của SC với (C').

Khi $S \equiv A$ thì $E \equiv O$.

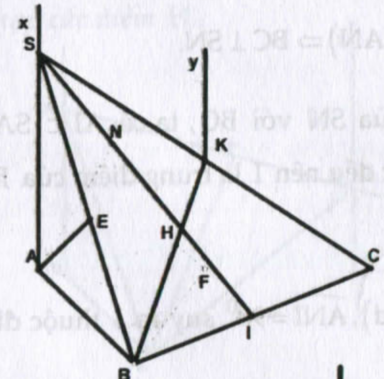
Khi S chạy về vô cực trên tia Ax thì H chạy về C.

Khi S di động trên tia Ax thì S di động trên nửa đường tròn (C') nằm trong nửa mặt phẳng (C,Δ) chứa tia Ax, có bờ là AC và E không trùng C.

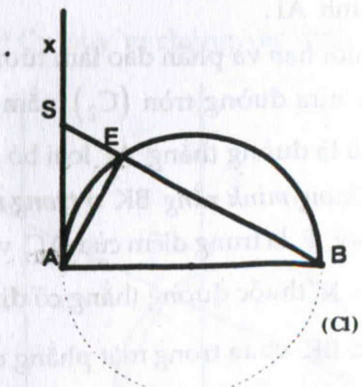
- Phần đảo giải tương tự như bài trên.

Vậy tập hợp các điểm E là nửa đường tròn (C') nằm trong nửa mặt phẳng (C,Δ) chứa tia Ax, có bờ là AC, loại bỏ điểm C.

98.



1. ***Tập hợp hình chiếu vuông góc của*** **A** ***lên*** **SB.**



- *Phần thuận.*

Gọi d là đường thẳng chứa tia Ax, E là hình chiếu vuông góc vuông góc của A lên SB.

Trong mặt phẳng (B,d) , $\widehat{AEB} = 90^0$ suy ra E thuộc đường tròn (C_1) đường kính AB.

- *Giới hạn .*

Ta có E la giao điểm thứ hai của SB và đường tròn (C_1) suy ra

Khi S trùng A thì E trùng A.

Khi S chạy về vô cực trên tia Ax thì E chạy về B.

Khi S di động trên tia Ax thì E di động trên nửa đường tròn (C_1) nằm trong nửa mặt phẳng (B,d) chứa tia Ax, có bờ là đường thẳng AB và E không trùng B.

- *Phần đảo.*

Lấy E là một điểm thuộc nửa đường tròn (C_1) nói trên, E khác B.

Gọi S là giao điểm của EB với tia Ax. Vì $AE \perp SB$ nên E là hình chiếu vuông góc của A lên SB.

Vậy tập hợp các điểm E là nửa đường tròn (C_1) loại bỏ điểm B, nằm trong nửa mặt phẳng (B,d) chứa tia Ax có bờ là AB.

2. *Chứng minh rằng đường thẳng* SN *qua trung điểm của đoạn* BC.

N là hình chiếu vuông góc của A lên SBC suy ra $AN \perp (SBC)$.

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SN.$$

Gọi I là giao điểm của SN với BC, ta có $AI \subset (SAN) \Rightarrow AI \perp BC$. Mà tam giác ABC là tam giác đều nên I là trung điểm của BC (đpcm).

***Tập hợp các điểm* N.**

- *Phần thuận.*

Trong mặt phẳng $(I,d), \widehat{ANI} = 90^0$ suy ra I thuộc đường tròn (C_2) đường kính AI.

Giới hạn và phần đảo làm tương tự như câu 1) ta được tập hợp các điểm N là nửa đường tròn (C_2) nằm trong nửa mặt phẳng (I,d) chứa tia Ax, có bờ là đường thẳng AI loại bỏ điểm I.

3. *Chứng minh rằng* BK *ở trong một mặt phẳng cố định.*

Gọi F là trung điểm của AC vì K là trung điểm của SC nên ta có $FK /\!/ Ax$

$\Rightarrow K$ thuộc đường thẳng cố định (D) qua F song song với Ax.

$\Rightarrow BK$ chứa trong mặt phẳng cố định $(B,(D))$.

***Tập hợp hình chiếu vuông góc của* A *lên* BK.**

- *Phần thuận.*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BK. Ta có :

$AC \perp BF$ (do $\triangle ABC$ đều) (1)

$AC \perp (D)$ (do $(D) /\!/ Ax$ nên $(D) \perp (ABC)$) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\Rightarrow AC \perp (B,(D)) \Rightarrow AC \perp BK$

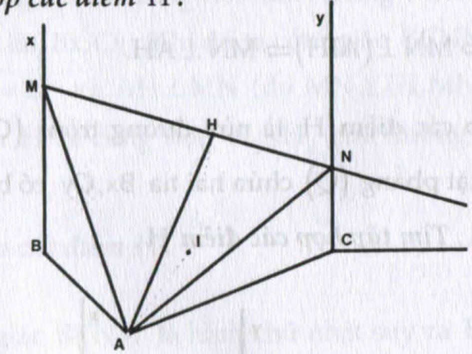
$$\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp AH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (AHC) \Rightarrow BK \perp HF \Rightarrow \widehat{BHF} = 90^0.$$

Trong mặt phẳng $(B,(D)), \widehat{BHF} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn (C_3) đường kính BF.

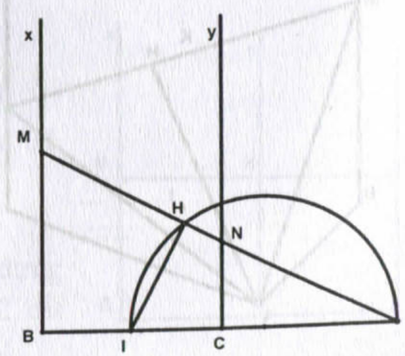
Giới hạn và phần đảo làm tương tự như câu 1) ta được tập hợp các điểm H là nửa đường tròn (C_3) loại bỏ điểm B, nằm trong nửa mặt phẳng $(B,(D))$ có bờ là BF, chứa tia Fy song song cùng chiều với tia Ax.

99.

1. $BM = \frac{1}{2}CN$. ***Tìm tập hợp các điểm* H.**



Bx, Cy cùng vuông góc với (P) nên $Bx /\!/ Cy$ suy ra chúng xác định một mặt phẳng, gọi mặt phẳng này là (Q).



- *Phần thuận*

Gọi J là giao điểm của MN với BC, vì $BM /\!/ CN$ và $BM = 2CN \Rightarrow C$ là trung điểm của $BJ \Rightarrow J$ cố định.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp Bx \end{cases} \Rightarrow AI \perp (Q) \Rightarrow AI \perp MN.$$

$\begin{cases} MN \perp AI \\ MN \perp AH \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AIH) \Rightarrow MN \perp IH \Rightarrow \widehat{IHJ} = 90^0.$

Trong mặt phẳng (Q) , $\widehat{IHJ} = 90^0$, suy ra H thuộc đường tròn (C_1) đường kính IJ .

- *Giới hạn*

H là giao điểm thứ hai của (C_1) với JM suy ra

Khi M trùng B thì H trùng I.

Khi M chạy về vô cực trên tia Bx thì H chạy về J .

Khi M di động trên tia Bx thì H di động trên nửa đường tròn (C_1) nằm trong nửa mặt phẳng (Q) chứa hai tia Bx, Cy có bờ là BC .

- *Phần đảo.*

Lấy H là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn (C_1) nói trên và H khác J .

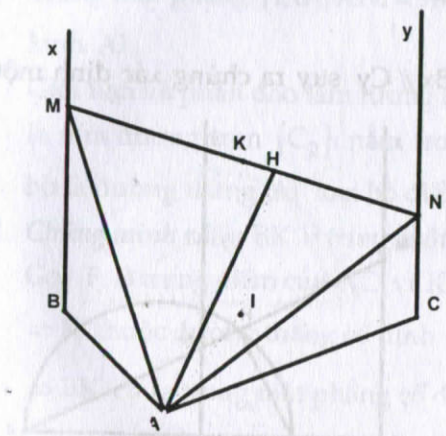
Dựng M, N lần lượt là giao điểm của JH với hai tia Bx, Cy .Ta phải chứng minh $BM = 2CN$ và $AH \perp MN$.

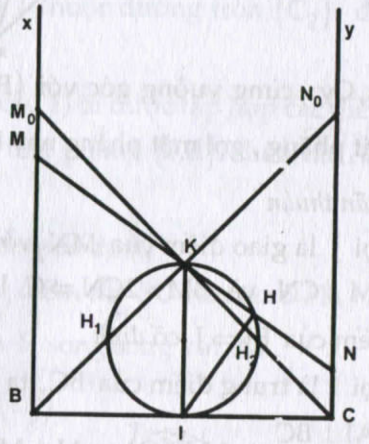
Vì C là trung điểm của BJ , $Cy \,//\, Bx \Rightarrow BM = 2CN$.

$\begin{cases} MN \perp IH \\ MN \perp AI \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AIH) \Rightarrow MN \perp AH.$

Vậy tập hợp các điểm H là nửa đường tròn (C_1) loại bỏ điểm I, nằm trong nửa mặt phẳng (Q) chứa hai tia Bx, Cy có bờ là BC .

2. $BM + CN = 2a$. ***Tìm tập hợp các điểm*** H .





- *Phần thuận.*

Gọi K là trung điểm của MN, IK là đường trung bình trong hình thang BCNM nên $IK \,//\, Bx$ và $IK = \dfrac{BM + CN}{2} = a$ suy ra K là điểm cố định .

Trong mặt phẳng (Q) , $\widehat{IHK} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn (C_2) đường kính IK .

- *Giới hạn .*

H là giao điểm thứ hai của MN với (C_2) suy ra

Khi M trùng B thì N trùng với N_0 trên tia Cy sao cho $CN_0 = 2a$, H trùng với H_1 với H_1 là giao điểm thứ hai của BN_0 với (C_2) .

Khi M trùng với C thì M trùng với M_0 trên tia Bx sao cho $BM_0 = 2a$, H trùng với H_2 với H_2 là giao điểm thứ hai của CM_0 với (C_2) .

Khi M, N di động trên Bx, Cy thỏa $BM + CN = 2a$ thì H di động trên cung H_1KH_2 của đường tròn (C_2) .

- *Phần đảo.*

Lấy điểm H thuộc cung tròn H_1KH_2 nói trên . Dựng M, N lần lượt là giao điểm của KH với hai tia Bx, Cy . Khi đó ta cótứ giác BCNM là hình thang do đó $BM + CN = 2IK = 2a$ và $AH \perp MN$ (do $MN \perp IH, MN \perp AI$).

Vậy tập hợp các điểm H là cung tròn H_1KH_2 của đường tròn (C_2) nằm trong mặt phẳng (Q) .

3. $BM = CN$.***Tìm tập hợp các điểm*** H .

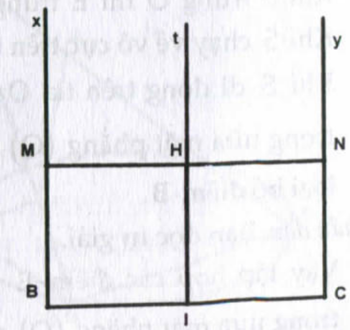
- *Phần thuận.*

Khi $BM = CN$ thì tứ giác BCNM là hình chữ nhật suy ra H là trung điểm của MN do đó H di động trên tia It song song cùng chiều với hai tia Bx, Cy

- *Giới hạn .*

Khi M trùng B thì H trùng I .

Khi M chạy về vô cực trên tia Bx thì H chạy về vô cực trên tia It .



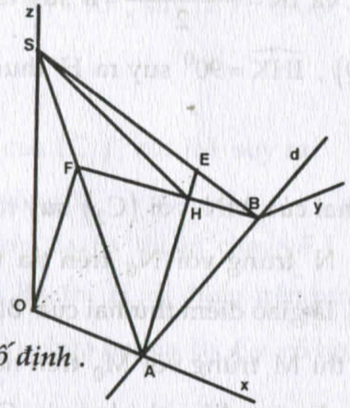
- *Phần đảo.*

Lấy H là một điểm bất kỳ trên tia It , dựng đường thẳng qua H song song với BC cắt Bx, Cy lần lượt tại M, N .

Tứ giác BCNM là hình chữ nhật suy ra $BM = CN$. Mặt khác $MN \perp IH, MN \perp AI$ suy ra $MN \perp AH$.

Vậy tập hợp các điểm H là tia It song song cùng chiều với Bx.

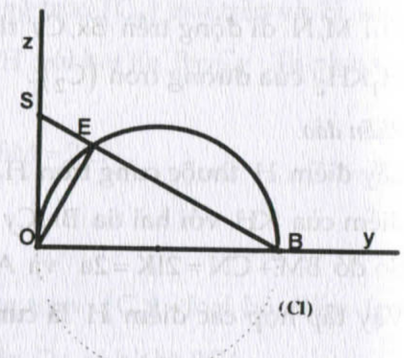
100.



1. ***Tập hợp*** **E, F** ***khi*** $\widehat{xOy}$ ***cố định.***

Tập hợp các điểm E.

- *Phần thuận.*



$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OS \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBS) \Rightarrow OA \perp SB.$

$\begin{cases} SB \perp OA \\ SB \perp AE \end{cases} \Rightarrow SB \perp (OAE)$

$\Rightarrow SB \perp OE \Rightarrow \widehat{OEB} = 90^0.$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa hai tia Oy, Oz thì (Q) cố định.

Trong mặt phẳng (Q), $\widehat{OEB} = 90^0$ suy ra E thuộc đường tròn (C_1) đường kính OB chứa trong (Q).

- *Giới hạn*

E là giao điểm thứ hai của BS với đường tròn (C_1), suy ra

Khi S trùng O thì E trùng O.

Khi S chạy về vô cực trên tia Oz thì E chạy về B.

Khi S di động trên tia Oz thì E di động trên nửa đường tròn (C_1) nằm trong nửa mặt phẳng (Q) chứa tia Oz, có bờ là đường thẳng chứa tia Oy, loại bỏ điểm B.

Phần đảo. Bạn đọc tự giải.

Vậy tập hợp các điểm E là nửa đường tròn (C_1), loại bỏ điểm B, nằm trong nửa mặt phẳng (Q) chứa tia Oz có bờ là đường thẳng chứa tia Oy.

Tập hợp các điểm F.

Gọi (R) là mặt phẳng chứa hai tia Ox, Oz, tương tự như trên ta có tập hợp các điểm F là nửa đường tròn (C_2) đường kính OA, loại bỏ điểm A, nằm trong nửa mặt phẳng (R) chứa tia Oz có bờ là đường thẳng chứa tia Ox.

2. ***Chứng minh*** **H** ***cố định.***

H là trực tâm tam giác SAB suy ra H là giao điểm của hai đường cao AE và BF.

$OH \subset (OAE) \Rightarrow OH \perp SB$ (do $SB \perp (OAE)$)

$OH \subset (OBF) \Rightarrow OH \perp SA$ (do $SA \perp (OBF)$)

$\Rightarrow OH \perp (SAB).$

Mà O cố định, $(SAB) \equiv (S,d)$ cố định, H là hình chiếu vuông góc của O lên (S,d) nên H cố định.

Tập hợp các điểm **E, F.**

Trong mặt phẳng cố định (S,d), $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 90^0$ nên E, F thuộc đường tròn (C_3) đường kính SH nằm trong mặt phẳng (S,d).

Mặt khác vì tam giác SAB không thể vuông tại S vì nếu như vậy thì

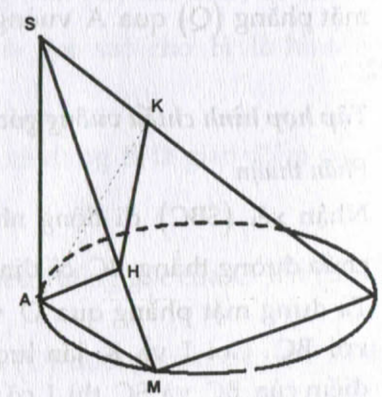
$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp OB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SOB) \Rightarrow SA \perp SO \Rightarrow S \equiv O!$

Suy ra E, F không trùng với hai điểm S và H vì nếu thế thì $H \equiv S$ và khi đó tam giác SAB vuông tại S.

Vậy tập hợp của các điểm E, F là đường tròn (C_3) loại bỏ hai điểm S và H.

101.

- *Phần thuận.*



Nhận xét mặt phẳng (SMB) luôn chứa đường thẳng cố định SB.

Ta dựng mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB như sau

Dựng $AK \perp SB (K \in SB)$ thì K cố định, dựng $AH \perp SM (H \in SM)$. Ta có

$\begin{cases} BM \perp MA \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SMA)$, mà $AH \subset (SMA) \Rightarrow BM \perp AH$.

$\begin{cases} AH \perp MB \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SMB) \Rightarrow AH \perp SB$ và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SMB) .

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AK \perp SB \end{cases} \Rightarrow (AHK) \perp SB.$

Vậy (AHK) là mặt phẳng qua A vuông góc với SA, gọi mặt phẳng (AHK) là (Q) thì (Q) cố định .

Trong mặt phẳng (Q) , $\widehat{AHK} = 90^0$ (do $HK \subset (SMB)$) suy ra H di động trên đường tròn (C_1) đường kính AK .

- *Phần đảo.*

Gọi H là một điểm tùy ý trên (C_1) ta phải chứng minh tồn tại một điểm M thuộc (C) sao cho H là hình chiếu vuông góc của A lên (SMB) .

Gọi M là giao điểm của SH với mặt phẳng (P), ta có

$\begin{cases} AH \perp HK \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SMB) \Rightarrow AH \perp MB$

$\begin{cases} MB \perp AH \\ MB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAM) \Rightarrow MB \perp MA \Rightarrow M \in (C).$

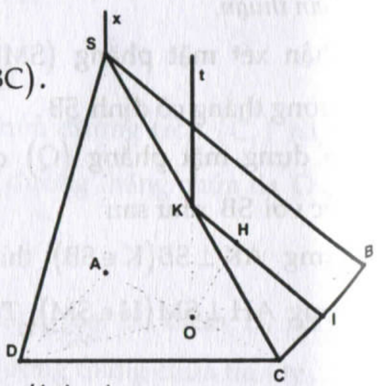
Mặt khác $AH \perp (SMB)$ nên H là hình chiếu vuông góc của A lên (SMB).

Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn (C_1) đường kính AK chứa trong mặt phẳng (Q) qua A vuông góc SB .

102.

1. *Tập hợp hình chiếu vuông góc của O lên (SBC).*

- *Phần thuận*



Nhận xét (SBC) di động nhưng luôn chứa đường thẳng BC cố định .

Ta dựng mặt phẳng qua O vuông góc với BC . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của BC và SC thì I cố định còn K di động trên tia Ot song song cùng chiều với tia Ax .

Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi I và đường thẳng chứa tia Ot . Ta có

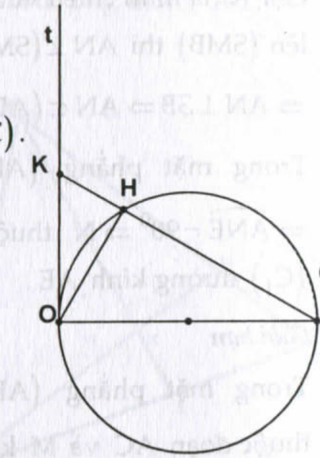
$\begin{cases} Ot \,//\, Ax \\ Ax \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow Ot \perp (ABCD) \Rightarrow Ot \perp BC.$

$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp Ot \end{cases} \Rightarrow BC \perp (P)$

Vậy (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với BC .

Dựng $OH \perp KI$, $H \in KI$.

$\begin{cases} OH \perp BC \text{ (do } OH \subset (P)) \\ OH \perp KI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$



Vậy H là hình chiếu vuông góc của O lên (SBC).

Trong mặt phẳng (P), $\widehat{OHI} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn (C) đường kính OI .

- *Giới hạn .*

H là giao điểm thứ hai của KI với (C) suy ra

Khi K trùng O thì H trùng O .

Khi K chạy về vô cực trên tia Ot thì H chạy về I.

Khi K di động trên tia Oz thì H di động trên nửa đường tròn (C) loại bỏ điểm I nằm trong nửa mặt phẳng (P) chứa tia Ot có bờ là đường thẳng OI .

- *Phần đảo.*

Gọi H là một điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn (C) nói trên , H khác I, ta chứng minh tồn tại một điểm S thuộc tia Ax sao cho H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SBC).

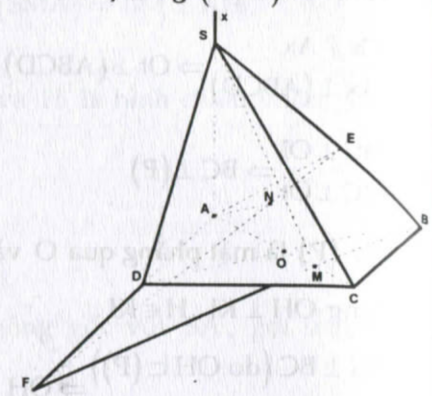
Dựng K là giao điểm của IH với tia Ot và dựng S là giao điểm của CK với tia Ax , ta có

$\begin{cases} OH \perp KI \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên (SBC).

Vậy tập hợp các điểm H là nửa đường tròn (C) đường kính OI , loại bỏ điểm I nằm trong nửa mặt phẳng (P) chứa tia Ot và có bờ là đường thẳng OI .

2. *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của* A *lên mặt phẳng* (SMB).

Phần thuận



Dựng $AE \perp SB, E \in SB$

$\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB.$

$\begin{cases} AD \perp SB \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow (ADE) \perp SB.$

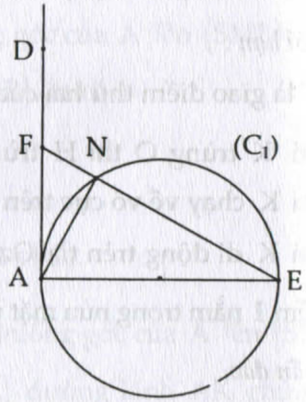
Gọi N là hình chiếu vuông góc của A lên (SMB) thì $AN \perp (SMB)$

$\Rightarrow AN \perp SB \Rightarrow AN \subset (ADE).$

Trong mặt phẳng (ADE), $AN \perp NE$

$\Rightarrow \widehat{ANE} = 90^0 \Rightarrow$ N thuộc đường tròn (C_1) đường kính AE.

- *Giới hạn*



Trong mặt phẳng (ABCD) khi M thuộc đoạn AC và M khác C thì BM cắt AD tại F và N là hình chiếu vuông góc của A lên EF (vì khi đó $AN \perp EF$, $AN \perp SB$ nên $AN \perp (SMB)$) suy ra N là giao điểm thứ hai của (C_1) với EF, suy ra

Khi M trùng A thì F trùng $A \Rightarrow$ N trùng A.

Khi M chạy về C thì F chạy về vô cực trên tia $AD \Rightarrow$ N chạy về E.

Khi M trùng C trong trường hợp này thì (SMB) trùng với mặt phẳng (SBC) suy ra N trùng E (vì $AE \perp BC, AE \perp SB$ nên $AE \perp (SBC)$).

Vậy khi M di động trên đoạn AC thì N di động trên nửa đường tròn (C_1) nằm trong nửa mặt phẳng (ADE) chứa tia AD, có bờ là đường thẳng AE.

- *Phần đảo.*

Gọi N là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn (C_1) nói trên ta chứng minh tồn tại một điểm M thuộc đoạn AC sao cho $AN \perp (SMB)$.

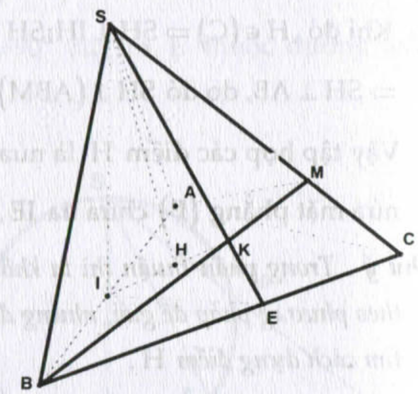
Khi N khác E thì EN cắt tia AD tại F, BF cắt đoạn AC tại M, khi đó $AN \perp NE$ (do $N \in (C_1)$), $AN \perp SB$ (do $AN \subset (ADE)$) suy ra $AN \perp (SMB)$.

Khi N trùng E thì M trùng C.

Vậy tập hợp các điểm N là nửa đường tròn (C_1) đường kính AE nằm trong nửa mặt phẳng (ADE) chứa tia AD có bờ là đường thẳng AE.

103.

- *Phần thuận*



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (AMB), ta có $SH \perp (AMB)$ $\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH$ chứa trong mặt phẳng (P) qua S vuông góc với AB (mặt phẳng này vuông góc với AB tại I do $SI \perp AB$).

Trong mặt phẳng (P), $\widehat{SHI} = 90^0$, suy ra H thuộc đường tròn (C) đường kính SI.

- *Giới hạn . Trước hết ta dựng điểm* H.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng đường thẳng d qua I vuông góc CA, CB với AB, d sẽ cắt một trong hai cạnh AB, AC. Giả sử d cắt CB tại E (trường hợp d cắt CA được xét tương tự). khi đó vì $AB \perp SI, AB \perp IE$ nên $AB \perp (SIE)$ suy ra $(SIE) \equiv (P)$

SE cắt BM tại K, gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên IK, ta có $SH \perp IK, SH \perp AB$ (do $SH \subset (P)$) suy ra $SH \perp (ABM)$ nghĩa là H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABM).

H là giao điểm thứ hai của (C) với IK. Mặt khác K là giao điểm của BM với SE nên khi M di động trên cạnh SC thì K di động trên đoạn SE, suy ra

Khi $M \equiv C$ thì $K \equiv E$ và $H \equiv I$

Khi $M \equiv S$ thì $K \equiv S$ và $H \equiv S$

Khi M di động trên cạnh SC thì K di động trên đoạn SE và do đó H di động trên nửa đường tròn (C) nằm trong nửa mặt phẳng (P) chứa tia IE, có bờ là đường thẳng SI.

- *Phần đảo.*

Gọi H là một điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn (C) nói trên, ta chứng minh tồn tại điểm M thuộc cạnh SC sao cho H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABM).

Dựng K là giao điểm của IH và SE, M là giao điểm của BK và SC.

Khi đó $H \in (C) \Rightarrow SH \perp IH; SH \subset (P)$

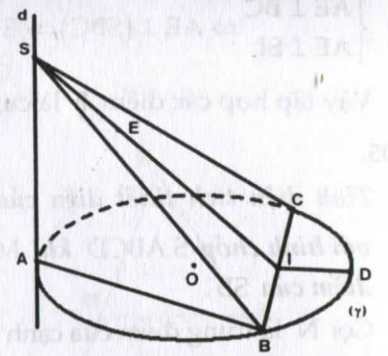
$\Rightarrow SH \perp AB$, do đó $SH \perp (ABM)$.

Vậy tập hợp các điểm H là nửa đường tròn (C) đường kính SI nằm trong nửa mặt phẳng (P) chứa tia IE, có bờ là đường thẳng SI.

Chú ý. *Trong phần thuận thì ta không cần biết vị trí chính xác của H mà chỉ cần theo phương pháp để giải, nhưng để dễ thực hiện phần giới hạn và phần đảo ta cần tìm cách dựng điểm H.*

104.

Phần thuận.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và I là giao điểm của AD với BC; E là hình chiếu vuông góc của A lên SI; ta có

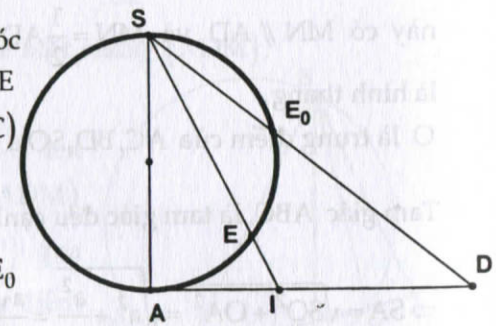
$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AE,$$

$$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SI \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$$

$\Rightarrow$ E là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC).

Trong mặt phẳng cố định (SAD), $\widehat{AES} = 90^0$ suy ra E thuộc đường tròn (C) đường kính SA.

- *Giới hạn.*



Khi BC di động nhưng luôn vuông góc với AD thì I di động trên đoạn AD; E là giao điểm thứ hai của SI với (C) suy ra

Khi I trùng A thì E trùng A.

Khi I trùng D thì E trùng E_0 với E_0 là giao điểm thứ hai của SD với (C).

Khi I di động trên đoạn AD thì E di động trên cung nhỏ AE_0 của đường tròn (C).

- *Phần đảo.*

Gọi E là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AE_0 của (C), ta phải chứng minh rằng tồn tại một dây cung BC của đường tròn (γ), BC vuông góc OA sao cho E là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC).

Dựng I là giao điểm của SE và đoạn AD. Dựng dây cung BC của đường tròn (C), BC qua I và vuông góc với OA. Ta có

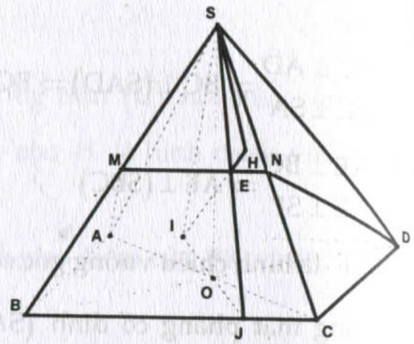
$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AE,$$

$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SI \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow E = hcA/_{(SBC)}$.

Vậy tập hợp các điểm E là cung nhỏ AE_0 của đường tròn (C).

105.

1. ***Tính diện tích thiết diện của** (ADM) **với hình chóp** S.ABCD **khi** M **là trung điểm của** SB.*



Gọi N là trung điểm của cạnh SC, MN là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow MN // BC \Rightarrow MN // AD \Rightarrow MN \subset (ADM)$

Mặt phẳng (ADM) cắt các mặt của hình chóp S.ABCD theo bốn đoạn giao tuyến AD, AM, MN, ND do đó thiết diện là hình tứ giác ADNM. Tứ giác này có $MN // AD$ và $MN = \frac{1}{2}AD$ nên là hình thang.

O là trung điểm của AC, BD, $SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SA = SC, SB = SD$

Tam giác ABC là tam giác đều cạnh a, suy ra $OA = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$,

Áp dụng định lí trung tuyến vào các tam giác SAB và SCD ta có

$$AM^2 = \frac{1}{2}\left(AS^2 + AB^2 - \frac{1}{2}SB^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5a^2}{4} + a^2 - \frac{7a^2}{8}\right) = \frac{11a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

$$DN^2 = \frac{1}{2}\left(DS^2 + DC^2 - \frac{1}{2}SC^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7a^2}{4} + a^2 - \frac{5a^2}{8}\right) = \frac{17a^2}{16} \Rightarrow DN = \frac{a\sqrt{17}}{4}.$$

Gọi K là giao điểm của AM và DN, vì $MN // AD$ và $MN = \frac{1}{2}AD$ do đó M, N lần lượt là trung điểm của AK và DK

$\Rightarrow AK = 2AM = \frac{a\sqrt{11}}{2}$, $DK = 2DN = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Trong tam giác AKD, định lí hàm số cosin cho

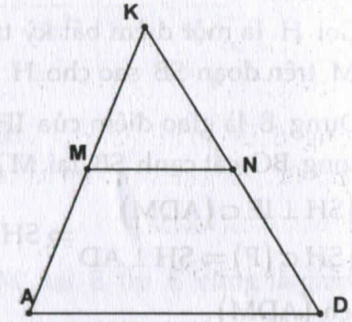
$AD^2 = AK^2 + DK^2 - 2AK.DK.\cos\widehat{AKD}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{11a^2}{4} + \frac{17a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{11}}{2}.\frac{a\sqrt{17}}{2}\cos\widehat{AKD}$

$\Rightarrow \cos\widehat{AKD} = \frac{12}{\sqrt{187}}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{AKD} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{AKD}}$

$= \sqrt{1 - \frac{144}{187}} = \sqrt{\frac{43}{187}}$.



Diện tích tam giác AKD.

$S_{AKD} = \frac{1}{2}KA.KA.\sin\widehat{AKD}$

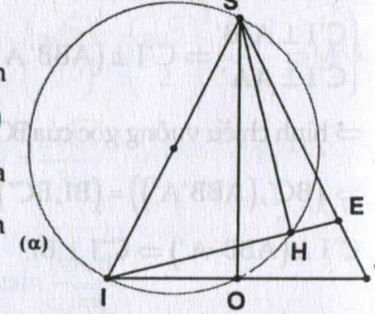
$= \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{11}}{2}.\frac{a\sqrt{17}}{2}.\sqrt{\frac{43}{187}} = \frac{a^2\sqrt{43}}{8}$.

$\frac{S_{KMN}}{S_{KAD}} = \frac{KM}{KA}.\frac{KN}{KD} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ADNM} = \frac{3}{4}S_{KAD} = \frac{3a^2\sqrt{43}}{32}$.

2. ***Tập hợp hình chiếu vuông góc của** S **lên mặt phẳng** (ADM).*

- *Phần thuận.*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ADM), $AH \perp (ADM)$ $\Rightarrow AH \perp AD \Rightarrow AH \subset$ mặt phẳng (P) qua S và vuông góc AD. Gọi I là giao điểm của (P) với AD.



Trong mặt phẳng (P), $\widehat{SHI} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn (α) đường kính SI.

- *Giới hạn. Trước hết ta dựng điểm* H.

Qua O dựng đường thẳng vuông góc với AD, cắt AD tại I và BC tại J.

Khi đó $\begin{cases} AD \perp SO \\ AD \perp IJ \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SIJ) \Rightarrow (SIJ) \equiv (P)$

Trong mặt phẳng (SBC), SJ cắt MN tại E; dựng $SH \perp IE$ $(H \in IE)$, ta có

$\begin{cases} SH \subset (P) \Rightarrow SH \perp AD \\ SH \perp IE \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ADM) \Rightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của S lên (ADM).

Khi M di động trên cạnh SB thì E di động trên đoạn SJ ; H là giao điểm thứ hai của IE với đường tròn (α) suy ra H di động trên cung nhỏ SO của đường tròn (α).

- *Phần đảo.*

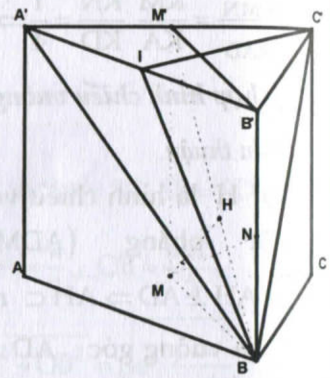
Gọi H là một điểm bất kỳ trên cung SO, ta chứng minh tồn tại một điểm M trên đoạn SB sao cho H là hình chiếu vuông góc của M lên (ADM).

Dựng E là giao điểm của IH với đoạn SJ, dựng đường thẳng qua E song song BC cắt cạnh SB tại M, ta có

$\begin{cases} SH \perp IE \subset (ADM) \\ SH \subset (P) \Rightarrow SH \perp AD \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ADM) \Rightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của S lên (ADM).

Vậy tập hợp các điểm H là cung nhỏ SO của đường tròn (α) đường kính SI chứa trong mặt phẳng (SIJ).

106.



1. ***Tính*** AA'.

Gọi I là trung điểm của $A'B'$, ta có

$\begin{cases} C'I \perp A'B' \\ C'I \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'I \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của BC' lên $(ABB'A')$ là BI.

$\Rightarrow (BC',(ABB'A')) = (BI, BC') = \widehat{C'BI} = 30^0$.

$C'I \perp (ABB'A') \Rightarrow C'I \perp BI$.

Tam giác vuông BIC' cho $BI = C'I\cot\widehat{C'BI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

$BB' /\!/ AA', AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp B'A'$.

Tam giác vuông $BB'I$ cho

$BB'^2 = BI^2 - B'I^2 = \dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow BB' = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$ (do $AA' = BB'$)

2. ***Tính*** $d(M,(BA'C'))$.

Gọi M' là trung điểm của $A'C'$, ta có $MM' /\!/ BB$.

Dựng $MH \perp BM'(H \in BM')$.

$\begin{cases} A'C' \perp B'M' \\ A'C' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BB'M'M) \Rightarrow A'C' \perp MH$.

$\begin{cases} MH \perp A'C' \\ MH \perp BM' \end{cases} \Rightarrow MH \perp (BA'C') \Rightarrow MH = d(M,(BA'C'))$.

Trong tam giác vuông BMM', MH là đường cao suy ra

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MM'^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{11}{6a^2}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d(M,(BA'C')) = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

3. ***Tính*** $(MN,(BA'C'))$.

Trong mặt phẳng $(BB'M'M)$, MN cắt BM' tại E thì E cũng là giao điểm của MN với $(BA'C')$, $MH \perp (BA'C')$ suy ra hình chiếu vuông góc của MN lên $(BA'C')$ là HE.

$\Rightarrow (MN,(BA'C')) = (MN,MH) = \widehat{MEH}$.

Trong tam giác vuông MHE, $\sin\widehat{MEH} = \dfrac{MH}{ME}$.

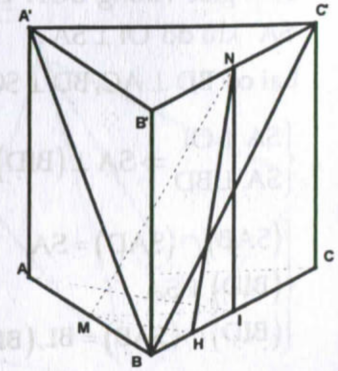
Tam giác vuông MBN, $MN^2 = BM^2 + BN^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{EM}{EN} = \frac{MM'}{BN} = 2 \Rightarrow \frac{EM}{MN} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3}MN = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{MEH} = \frac{\frac{a\sqrt{66}}{11}}{\frac{a\sqrt{5}}{3}} = \frac{3a\sqrt{6}}{\sqrt{55}} \Rightarrow \widehat{MEH} = \arcsin\frac{3a\sqrt{6}}{\sqrt{55}}.$$

Vậy $(MN,(BA'C')) = \arcsin\dfrac{3a\sqrt{6}}{\sqrt{55}}$.

107.



1. ***Tính độ dài các cạnh đáy và cạnh bên của hình lăng trụ.***

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của các đoạn BC và BI, ta có $NI /\!/ AA' \Rightarrow NI \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của MN lên (ABC) là MI

$\Rightarrow (MN,(ABC)) = (MN,MI) = \widehat{NMI} = \alpha$.

$AI \perp BC$ (do ΔABC vuông cân tại A) và $AI \perp BB'$. Suy ra $AI \perp (BCC'B')$

$MH // AI \Rightarrow MH \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của MN lên $(BCC'B')$ là NH

$\Rightarrow (MN,(BCC'B')) = (MN,NH) = \widehat{MNH} = \beta$.

Tam giác vuông MIN (vuông tại I) cho

$MI = MN.\cos\widehat{NMI} = a\cos\alpha \Rightarrow AB = AC = 2MI = 2a\cos\alpha$.

$AA' = NI = MN\sin\widehat{NMI} = a\sin\alpha$.

Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = AC\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a\cos\alpha$ (1)

2. *Chứng minh* $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$.

Tam giác MHN vuông tại H cho $MH = MN\sin\widehat{MNH} = a\sin\beta$

$\Rightarrow BC = 2AI = 4MH = 4a\sin\beta$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2\sqrt{2}a\cos\alpha = 4a\sin\beta \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$.

108. Bạn đọc tự vẽ hình

1. *Chứng minh* $\widehat{ASC} = 90^0$.

Theo tính chất của hình thoi ta có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của chúng

Trong tam giác vuông COD, $OC^2 = CD^2 - OD^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác SAC, SO là trung tuyến và $SO = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$ tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow \widehat{ASC} = 90^0$.

2. *Tính* $((SAB),(SAD))$.

Tam giác vuông SOA có $SO = OA$ nên cân tại A. Gọi I là trung điểm của SA khi đó $OI \perp SA$.

Lại có $BD \perp AC, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$

$\begin{cases} SA \perp OI \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BID)$

$\begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ (BID) \perp SA \\ (BID) \cap (SAB) = BI, (BID) \cap (SAD) = DI \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SAD)) = (IB, ID)$

Tam giác vuông SOC cho $SC = OC\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SAC, OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}BD$

Trong tam giác BID, OI là trung tuyến, $OI = \frac{1}{2}BD \Rightarrow$ tam giác BID vuông tại $I \Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$.

Suy ra $((SAB),(SAD)) = 90^0$.

3. *Tính* $((SBC),(ABC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp OH \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOH)$

$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SOH) \perp BC \\ (SOH) \cap (SBC) = SH, (SOH) \cap (ABCD) = OH \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SH,OH) = \widehat{SHO}$ (do $\widehat{SHO}$ là góc nhọn)

Trong tam giác vuông BOC,

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{9}{2a^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

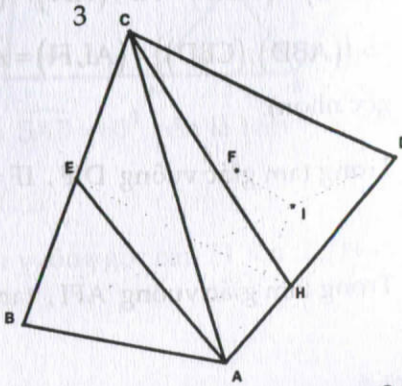
Trong tam giác vuông SOH: $\tan\widehat{SHO} = \frac{SO}{OH} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$.

Vậy $((SBC),(ABCD)) = 60^0$.

109.

1. *Tính* AD.

Gọi E là trung điểm của BC vì tam giác ABC vuông cân tại A, DBC là tam giác đều nên $AE \perp BC, DE \perp BC$, mặt khác góc $\widehat{AED}$ nhọn



suy ra $((ABC),(DBC)) = (AE, DE) = \widehat{AED} = 30^0$.

$BC = a\sqrt{2}$, $AE = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $DE = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Định lí hàm số cosin trong tam giác AED cho:

$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE.DE.\cos\widehat{AED}$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$\Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$d(A,(BCD))$.

Gọi F là trung điểm của DE. Tam giác AED cân tại A (do $AD = AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

nên $AF \perp DE$ (1)

Mặt khác $BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp AF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AF \perp (BCD) \Rightarrow AF = d(A,(BCD))$

Tam giác AFE vuông tại F cho $AF = AE\sin\widehat{AED} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Vậy $d(A,(BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

2a) Tính $((ABD),(CBD))$.

Dựng $FI \perp BD, (I \in BD)$, ta có $BD \perp FI, BD \perp AF \Rightarrow BD \perp (AFI)$

$$\begin{cases} (ABD) \cap (CBD) = BD \\ (AFI) \perp BD \\ (AFI) \cap (ABD) = AI,\ (AFI) \cap (CBD) = FI \end{cases}$$

$\Rightarrow ((ABD),(CBD)) = (AI, FI) = \widehat{AIF}$ (do tam giác AFI vuông tại $F \Rightarrow \widehat{AIF}$ là góc nhọn).

Trong tam giác vuông DIF, $IF = DF\sin\widehat{FDI} = \frac{a\sqrt{6}}{4}\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{8}$

Trong tam giác vuông AFI, $\tan\widehat{AIF} = \frac{AF}{FI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{8}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow ((ABD),(CBD)) = \widehat{AIF} = \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Tính $((BAD),(CAD))$.

$BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp AD$, dựng $EH \perp AD (H \in AD) \Rightarrow (BCH) \perp AD$.

Lại có $(BCH) \cap (BDA) = BH, (BCH) \cap (CAD) = CH$

$\Rightarrow ((BAD),(CBD)) = (BH, CH)$

Ta có: Tam giác BHC có trung tuyến $EH \perp BC$ nên cân tại H,

$$2S_{AED} = EH.AD = AF.DE \Rightarrow EH = \frac{AF.DE}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

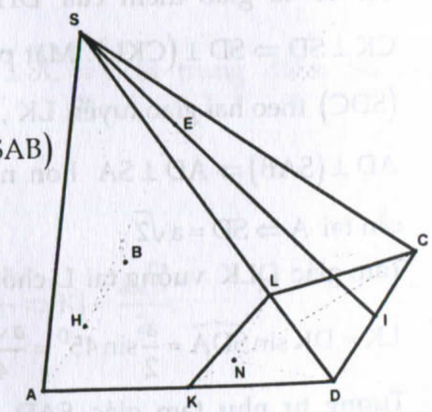
Trong tam giác vuông CEH, $\tan\widehat{CHE} = \frac{CE}{EH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \widehat{CHE} = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CHB} = 2\widehat{CHE} = 2\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3} > \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (BH, CH) = \pi - 2\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ((BAD),(CAD)) = \pi - 2\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

110.

1. Tính SH *và* $d(H,(SCD))$.



$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \ (\text{do } SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$$

$\Rightarrow ((SAD),(ABCD)) = (SA, AB)$

Lại có tam giác SHA vuông tại H nên $\widehat{SAB}$ là góc nhọn do đó:

$((SAD),(ABCD)) = (SA, AB) = \widehat{SAB} = 60^0$

Tam giác SAB có trung tuyến $SH \perp AB$ và $\widehat{SAB} = 60^0$ nên là tam giác đều

suy ra $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là trung điểm của CD, E là hình chiếu vuông góc của H lên SI, ta có

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HE$$

$\begin{cases} HE \perp CD \\ HE \perp SI \end{cases} \Rightarrow HE \perp (SCD) \Rightarrow HE = d(H,(SCD))$.

Tam giác SHK vuông tại H cho

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HE^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(H,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

2. ***Chứng minh*** $CK \perp SD$. ***Tính*** $((SDA),(SDC))$.

Chứng minh $CK \perp SD$.

Hai tam giác vuông HAD và CDK bằng nhau (c.g.c) suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{DCK}$.

Mặt khác $\widehat{ADH} + \widehat{HDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DCK} + \widehat{HDC} = 90^0 \Rightarrow CK \perp DH$

$\begin{cases} CK \perp DH \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$.

Tính $((SDA),(SDC))$

Gọi N là giao điểm của DH và CK, dựng $NL \perp SD (L \in SD)$, lại có $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (CKL)$. Mặt phẳng (CKL) cắt hai mặt phẳng (SDA) và (SDC) theo hai giao tuyến LK, LC $\Rightarrow ((SDA),(SDC)) = (LK, LC)$.

$AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$ hơn nữa $SA = AD = a \Rightarrow$ Tam giác SAD vuông cân tại $A \Rightarrow SD = a\sqrt{2}$.

Tam giác DLK vuông tại L cho

$$LK = DK \sin \widehat{SDA} = \frac{a}{2}\sin 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Tương tự như tam giác SAD ta cũng có tam giác SBC vuông cân tại $B \Rightarrow SC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác SDC, $2S_{SDC} = CL.SC = SI.DC$

$$\Rightarrow CL = \frac{SI.DC}{SC} = \frac{\sqrt{SH^2 + HI^2}.a}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{7}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Tam giác vuông CDK cho $CK = \sqrt{DK^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

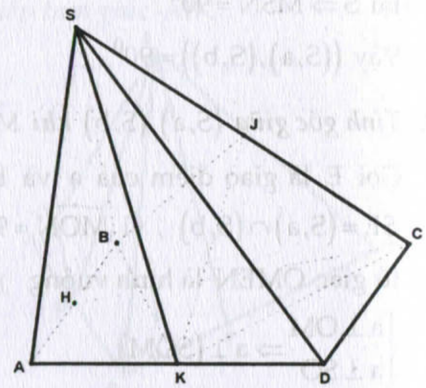
Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác CLK, ta có

$$CK^2 = CL^2 + LK^2 - 2CL.LK.\cos\widehat{CLK}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2}{4} = \frac{7a^2}{8} + \frac{2a^2}{16} - 2\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\cos\widehat{CLK} \Rightarrow \cos\widehat{CLK} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \widehat{CLK} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) > \frac{\pi}{2} \Rightarrow (LC, LK) = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Vậy $((SDA),(SDC)) = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$



3. ***Tính*** $((SBC),(SKC))$.

Chứng minh tương tự câu 2) ta có $BK \perp CH$ mà $BK \perp SH$:

$\Rightarrow BK \perp (SHC) \Rightarrow BK \perp SC$.

Dựng $BJ \perp SC (J \in SC)$, khi đó $(BKJ) \perp SC$ suy ra $((SBC),(SKC)) = (JB, JK)$.

Tam giác SBC vuông cân tại B, $BJ \perp SC \Rightarrow J$ là trung điểm SC và $BJ = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác KJC vuông tại J cho

$$KJ^2 = CK^2 - JC^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow KJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

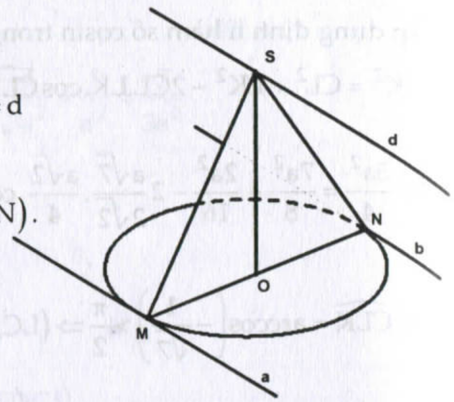
Tam giác vuông BAK cho $BK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Vì $BJ^2 + KJ^2 = \frac{5a^2}{4} = BK^2$ nên tam giác BJK vuông tại J tức là $\widehat{BJK} = 90^0$.

Vậy $((SBC),(SKC)) = 90^0$.

111. 1. *Tính góc giữa* $(S,a),(S,b)$ *khi* M,N *xuyên tâm đối.*

$\begin{cases} a \perp OM \\ a \perp SO \end{cases} \Rightarrow a \perp (SMN)$.



$S \in (S,a) \cap (S,b), a \,//\, b \Rightarrow (S,a) \cap (S,b) = d$

với d là đường thẳng qua S, $d \,//\, a \,//\, b$

$\Rightarrow d \perp (SMN) \Rightarrow ((S,a),(S,b)) = (SM,SN)$.

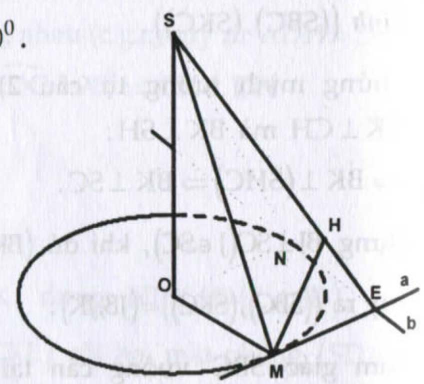
Tam giác SMN có trung tuyến

$SO = R = \frac{1}{2}MN \Rightarrow \Delta SMN$ vuông

tại $S \Rightarrow \widehat{MSN} = 90^0$.

Vậy $((S,a),(S,b)) = 90^0$.

2. ***Tính góc giữa*** $(S,a),(S,b)$ ***khi*** $\widehat{MON} = 90^0$.



Gọi E là giao điểm của a và b, ta có

$SE = (S,a) \cap (S,b)$, vì $\widehat{MON} = 90^0$ nên

tứ giác OMEN là hình vuông

$\begin{cases} a \perp OM \\ a \perp SO \end{cases} \Rightarrow a \perp (SOM)$

$\Rightarrow a \perp SM \Rightarrow \Delta SME$ vuông tại M.

Tương tự tam giác SNE vuông tại N.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên SE.

$\begin{cases} MN \perp OE \\ MN \perp SE \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SOE) \Rightarrow MN \perp SE.$

$\begin{cases} SE \perp MN \\ SE \perp MH \end{cases} \Rightarrow SE \perp (MNH)$

$\Rightarrow ((S,a),(S,b)) = (HM,HN)$

Hai tam giác vuông SEM và SEN có SE chung $EM = EN = R$ nên chúng bằng nhau suy ra hai đường cao tương ứng MH và NH bằng nhau.

Tam giác SOM có $SO \perp OM$, $SO = OM = R$ nên tam giác SOM vuông cân tại O suy ra $SM = R\sqrt{2}$

Tam giác vuông SOE cho $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác MHN ta được

$MN^2 = MH^2 + NH^2 - 2MH.NH.\cos\widehat{MHN}$

$\Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cos\widehat{MHN}$

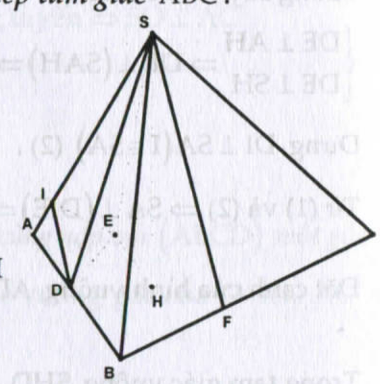
$\Rightarrow 2a^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{4a^2}{3}\cos\widehat{MHN} \Rightarrow \cos\widehat{MHN} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MHN} = 120^0$

$\Rightarrow (HM,HN) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Vậy $((S,a),(S,b)) = 60^0$.

112.

1. ***Chứng minh*** **H** ***là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác*** **ABC.**



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC, BC.

Ta có:

$\begin{cases} AB \perp HD, AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHD) \\ (SHD) \cap (ABC) = HD, (SHD) \cap (SAB) = SH \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAB),(ABC)) = (HS,HD) = \widehat{SDH}$

(do ΔSHD vuông tại H nên $\widehat{SDH}$ là góc nhọn.)

Tương tự $((SAC),(ABC)) = \widehat{SEH}$, $((SBC),(ABC)) = \widehat{SFH}$.

Theo giả thiết $\widehat{SDH} = \widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 60^0 \Rightarrow \Delta SHD = \Delta SHE = \Delta SHF$

$\Rightarrow HD = HE = HF$.

Hơn nữa H ở trong tam giác ABC nên H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tính SH.

Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC thì

$$p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{4a^2 - a^2} + 2a\right) = \frac{a}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $r = HD = HE = HF$.

Diện tích của tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = p.r$

$\Rightarrow r=\frac{AB.AC}{2p}=\frac{a^2\sqrt{3}}{a\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Trong tam giác vuông SHD, $SH=HD\tan 60^0=\frac{a}{\sqrt{3}+1}\sqrt{3}=\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$.

2. ***Tính góc giữa hai mặt phẳng*** (SAB) ***và*** (SAC).

Trong mặt phẳng (ABC), HD và AC cùng vuông góc với AB nên $HD \,//\, AC$. Tương tự $HE \,//\, AB$.

Tứ giác ADHE có $HD \,//\, AC, HE \,//\, AB, \widehat{A}=90^0$, $HD=HE$ nên là hình vuông suy ra $DE\perp AH$.

$$\begin{cases} DE\perp AH \\ DE\perp SH \end{cases} \Rightarrow DE\perp (SAH) \Rightarrow DE\perp SA \ (1)$$

Dựng $DI\perp SA\left(I\in SA\right)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SA\perp (DIE) \Rightarrow SA\perp EI \Rightarrow \left((SAB),(SAC)\right)=(ID,IE)$.

Đặt cạnh của hình vuông $ADHE=x$ với $x=\frac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Trong tam giác vuông SHD, $SD=\frac{HD}{\cos 60^0}=2x$.

Trong tam giác vuông SDA, $\frac{1}{DI^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SD^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{5}{4x^2}\Rightarrow DI=\frac{2x}{\sqrt{5}}$.

Hai tam giác vuông SDA và SEA bằng nhau (c.g.c) $\Rightarrow EI=DI$.

Định lí hàm số cosin trong tam giác DIE cho

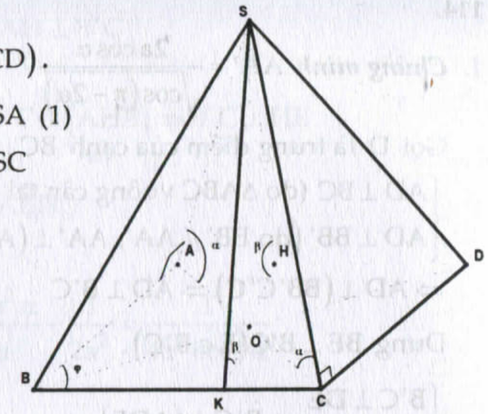
$$DE^2=ID^2+IE^2-2ID.IE.\cos\widehat{DIE}$$

$$\Rightarrow \left(x\sqrt{2}\right)^2=2\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^2-2\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^2.\cos\widehat{DIE}.\Rightarrow 2x^2=\frac{8x^2}{5}-\frac{8x^2}{5}\cos\widehat{DIE}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{DIE}=-\frac{1}{4}\Rightarrow \widehat{DIE}=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)>\frac{\pi}{2}\Rightarrow (ID,IE)=\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Vậy $\left((SAB),(SAC)\right)=\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

113.



1. ***Chứng minh*** SO ***vuông góc với*** $(ABCD)$.

Tam giác SAB vuông tại $A\Rightarrow AB\perp SA$ (1)

Tam giác SCD vuông tại $C\Rightarrow CD\perp SC$

mà $AB \,//\, CD\Rightarrow AB\perp SC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AB\perp (SAC)$

$\Rightarrow \left((SAB),(ABCD)\right)=(AS,AC)$

(do $\widehat{SAC}$ nhọn).

Tương tự $\left((SCD),(ABCD)\right)=\widehat{SCA}=\alpha$.

Suy ra tam giác SAC cân tại S, SO là trung tuyến $\Rightarrow SO\perp AC$

$AB\perp (SAC)\Rightarrow AB\perp SO$.

$$\begin{cases} SO\perp AB \\ SO\perp AC \end{cases}\Rightarrow SO\perp (ABCD)$$

2. ***Chứng minh hai mặt phẳng*** (SBC) ***và*** (SAD) ***cùng hợp với*** $(ABCD)$ ***một góc*** β

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc vuông góc của O lên AD và BC, ta có O là trung điểm của HK.

$$\begin{cases} AD\perp SO \\ AD\perp OH \end{cases}\Rightarrow AD\perp (SHK)\Rightarrow \left((SAD),(ABCD)\right)=(HS,HK)=\widehat{SHK}$$

Tương tự $\left((SBC),(ABCD)\right)=\widehat{SKH}$.

Tam giác SHK có trung tuyến $SO\perp HK$ nên tam giác SHK cân tại S

$\Rightarrow \widehat{SHK}=\widehat{SKH}$.

Vậy $\left((SAD),(ABCD)\right)=\left((SBC),(ABCD)\right)=\beta$.

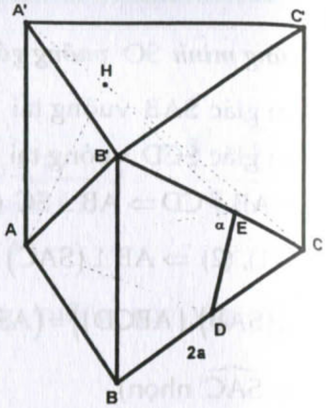
Chứng minh $\cot\beta=\cot\alpha.\cot\varphi$.

Hai tam giác vuông ABC và OKC đồng dạng (có góc nhọn C chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{OK}=\frac{BC}{OC}\Rightarrow OK=\frac{AB.OC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{OK}{SO}=\frac{OC}{SO}.\frac{AB}{BC}\Rightarrow \cot\beta=\cot\alpha.\cot\varphi.$$

114.



1. ***Chứng minh*** $AA' = \dfrac{2a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}$.

Gọi D là trung điểm của cạnh BC, ta có

$$\begin{cases} AD \perp BC \text{ (do } \Delta ABC \text{ vuông cân tại A)} \\ AD \perp BB' \left(\text{do } BB' \,//\, AA',\ AA' \perp (ABC)\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow AD \perp (BB'C'C) \Rightarrow AD \perp B'C$

Dựng $BE \perp B'C (E \in B'C)$.

$$\begin{cases} B'C \perp DE \\ B'C \perp AD \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (ADE)$$

Lại có $(ADE) \cap (AB'C) = AE, (ADE) \cap (BB'C'C) = DE$, tam giác ADE vuông tại D nên $\widehat{AED}$ nhọn, suy ra $((AB'C),(BB'C'C)) = (EA, ED) = \widehat{AED} = \alpha$.

Trong tam giác vuông ADE,

$DE = AD\cot\alpha = a\cot\alpha \left(\text{do } AD = \dfrac{1}{2}BC = a\right)$.

Hai tam giác vuông CED và CBB' có góc nhọn C chung nên đồng dạng suy ra $\dfrac{DE}{CD} = \dfrac{BB'}{B'C} = \dfrac{BB'}{\sqrt{BB'^2 + BC^2}}$

$$\Rightarrow \frac{a\cot\alpha}{a} = \frac{BB'}{\sqrt{BB'^2 + 4a^2}} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{BB'^2}{BB'^2 + 4a^2}$$

$$\Rightarrow BB'^2\left(1 - \cot^2\alpha\right) = 4a^2\cot^2\alpha$$

$$\Rightarrow BB'^2 = \frac{4a^2\cot^2\alpha}{1 - \cot^2\alpha} = \frac{4a^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4a^2\cos^2\alpha}{-\cos 2\alpha} = \frac{4a^2\cos^2\alpha}{\cos(\pi - 2\alpha)}$$

$$\Rightarrow AA' = BB' = \frac{2a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}.$$

2. ***Tính góc giữa hai mặt phẳng*** $(AB'C)$ ***và*** $(A'B'C)$.

Dựng $AH \perp A'C (H \in A'C)$, ta có

$$\begin{cases} B'A' \perp A'C' \\ B'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'A' \perp (ACC'A') \Rightarrow B'A' \perp AH$$

$$\begin{cases} AH \perp B'A' \\ AH \perp A'C \end{cases} \Rightarrow AH \perp (B'A'C') \Rightarrow AH \perp B'C$$

$$\begin{cases} B'C \perp AH \\ B'C \perp AE \left(\text{do } B'C \perp (ADE)\right) \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (AHE) \Rightarrow B'C \perp HE$$

$\Rightarrow ((AB'C),(A'B'C)) = (EH, EA) = \widehat{AEH}$.

Tam giác vuông A'AC cho

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{4a^2\cos^2\alpha} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{4a^2\cos^2\alpha}$$

$\Rightarrow AH = 2a\cos\alpha$.

Trong tam giác vuông ADE, $AE = \dfrac{AD}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Trong tam giác vuông AHE,

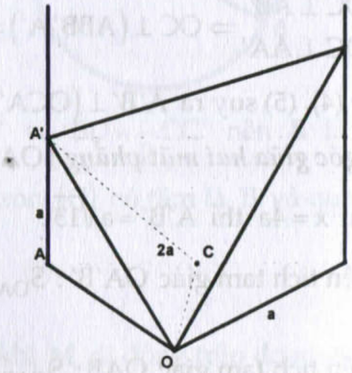
$$\sin\widehat{AEH} = \frac{AH}{AE} = \frac{2a\cos\alpha}{\dfrac{a}{\sin\alpha}} = 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \widehat{AEH} = \left[\begin{array}{l} 2\alpha \\ \pi - 2\alpha \end{array}\right.$$

Mặt khác do $BB'^2 = \dfrac{4a^2\cos^2\alpha}{-\cos 2\alpha} > 0 \Rightarrow \cos 2\alpha < 0 \Rightarrow 2\alpha > \dfrac{\pi}{2}$.

Và vì $\widehat{AEH}$ là góc nhọn nên $\widehat{AEH} = \pi - 2\alpha$.

Vậy $((AB'C),(A'B'C)) = \pi - 2\alpha$.

115.



1. ***Tính*** x ***để tam giác*** $OA'B'$ ***vuông tại*** O.

Giả sử tam giác $OA'B'$ vuông tại O.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBB') \Rightarrow OA \perp OB'$$

$$\begin{cases} OB' \perp OA \\ OB' \perp OA' \end{cases} \Rightarrow OB' \perp (OAA') \ (1).$$

Lại có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAA') (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OB \equiv OB' \Rightarrow B' \equiv B \Rightarrow x = 0$.

Đảo lại khi $x = 0$ thì $OB' \equiv OB \Rightarrow OB' \perp (OAA') \Rightarrow OB' \perp OA' \Rightarrow \Delta OA'B'$ vuông tại O.

Vậy tam giác $OA'B'$ vuông tại $O \Leftrightarrow x = 0$.

2. ***Tính*** $A'B', OA', OB'$ ***theo*** a ***và*** x.

Tam giác vuông OAB cho: $OA^2 = AB^2 - OB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow OA = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông OAA', $OA'^2 = OA^2 + AA'^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow OA' = 2a$.

Trong tam giác vuông OBB', $OB'^2 = OB^2 + BB'^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow OB' = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên BB', ta có $A'H = AB = 2a, BH = AA' = a$.

Trong tam giác vuông $A'HB'$,

$$A'B'^2 = A'H^2 + B'H^2 = 4a^2 + (x-a)^2 = x^2 - 2ax + 5a^2$$

$$\Rightarrow A'B' = \sqrt{x^2 - 2ax + 5a^2}.$$

Chứng tỏ tam giác $OA'B'$ ***không thể vuông tại*** B'.

Tam giác $OA'B'$ vuông tại $B' \Leftrightarrow OA'^2 = A'B'^2 + OB'^2$

$\Leftrightarrow 4a^2 = x^2 - 2ax + 5a^2 + a^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - ax + 2a^2 = 0$ (3)

Phương trình (3) vô nghiệm nên tam giác OA, AB, AC không thể vuông tại B'.

Định x ***để tam giác*** $OA'B'$ ***vuông tại*** M, E, F.

Tam giác $OA'B'$ vuông tại $A' \Leftrightarrow OB'^2 = OA'^2 + A'B'^2$

$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4a^2 + x^2 - 2ax + 5a^2 \Leftrightarrow x = 4a$.

3. ***Khi*** $x = 4a$, ***chứng minh*** CA' ***vuông góc với*** $A'B'$.

Khi $x = 4a$ thì tam giác $OA'B'$ vuông tại $B' \Rightarrow A'B' \perp OA'$ (4)

$$\begin{cases} OC \perp AB \\ OC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow OC \perp (ABB'A') \Rightarrow OC \perp A'B' \ (5)$$

Từ (4), (5) suy ra $A'B' \perp (OCA') \Rightarrow A'B' \perp CA'$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng $(OA'B')$ ***và*** (P).

Khi $x = 4a$ thì $A'B' = a\sqrt{13}$.

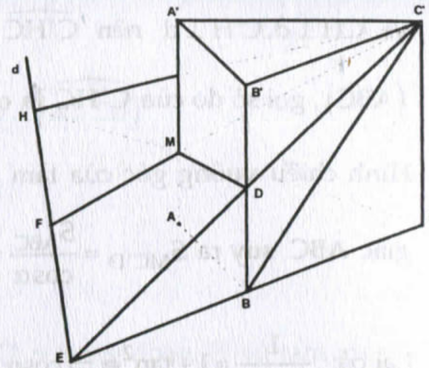
Diện tích tam giác $OA'B'$: $S_{OA'B'} = \frac{1}{2}OA'.A'B' = \frac{1}{2}2a.a\sqrt{13} = a^2\sqrt{13}$.

Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Hình chiếu vuông góc của tam giác $OA'B'$ lên mặt phẳng (P) là tam giác OAB, gọi α là số đo của góc giữa (P) và $(OA'B')$ ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{OAB}}{S_{OA'B'}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{a^2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{26} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{39}}{26}.$$

116.



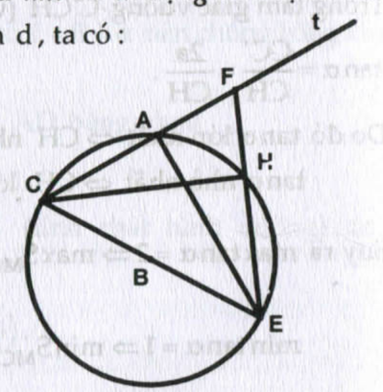
1. ***Chứng minh giao tuyến*** d ***của hai mặt phẳng*** (ABC) ***và*** $(MC'D)$ ***qua một điểm cố định.***

Trong mặt phẳng $(BCC'B')$, $C'D$ cắt CB tại E, trong mặt phẳng $(ACC'A')$, $C'M$ cắt AC tại F thì E, F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và $(MC'D)$

Suy ra giao tuyến d của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua E và F và vì E cố định nên d qua điểm cố định E.

2. ***Tập hợp hình chiếu vuông góc của*** C' ***lên*** d ***khi*** M ***di động trên cạnh*** AA'.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' lên d, ta có:



$$\begin{cases} d \perp CC' \\ d \perp C'H \end{cases} \Rightarrow d \perp (C'CH)$$

$\Rightarrow d \perp CH \Rightarrow \widehat{CHE} = 90^0$

Trong mặt phẳng (ABC), $\widehat{CHE} = 90^0$

$\Rightarrow$ H di động trên đường tròn (C) đường kính CE chứa trong mặt phẳng (ABC).

Hơn nữa trong tam giác ECC', $BD \,//\, CC'$ và $BD = \frac{1}{2}CC'$ nên B là trung điểm của $CE, BA = BC = a$ do đó đường tròn (C) có tâm là B và qua điểm A, bán kính của (C) bằng a.

Giới hạn.

F là giao điểm của $C'M$ với CA, suy ra khi M di động trên đoạn AA' thì F di động trên tia At nằm trên đường thẳng CA và cùng chiều với $\overrightarrow{CA}$.

H là giao điểm thứ hai của đường tròn (C) với EF suy ra khi F di động trên tia At thì H di động trên cung nhỏ AE của đường tròn (C).

Phần đảo(bạn đọc tự giải).

Vậy tập hợp các điểm H là cung nhỏ AE của đường tròn (C).

Giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $MC'D$.

Vì $CH \perp d, C'H \perp d$ nên $\widehat{C'HC}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D)$ và (ABC), gọi số đo của $\widehat{C'HC}$ là $\alpha\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác $MC'D$ lên mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC suy ra $S_{MC'D} = \frac{S_{ABC}}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$

Lại có: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \Rightarrow S_{MC'D} = \frac{a^2\sqrt{3\left(1+\tan^2\alpha\right)}}{4}$

Suy ra: $S_{MC'D}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \tan\alpha$ lớn nhất,

$S_{MC'D}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \tan\alpha$ nhỏ nhất.

Trong tam giác vuông $C'CH$ (vuông tại C)

$\tan\alpha = \frac{CC'}{CH} = \frac{2a}{CH}$.

Do đó $\tan\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow CH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow CH = a$

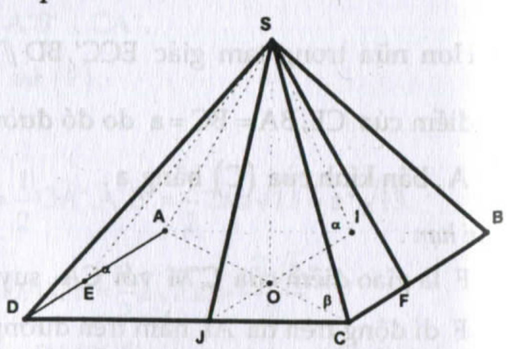
$\tan\alpha$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow CH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv E \Leftrightarrow CH = 2a$.

Suy ra $\max\tan\alpha = 2 \Rightarrow \max S_{MC'D} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

$\min\tan\alpha = 1 \Rightarrow \min S_{MC'D} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

117.

1. ***Chứng minh*** $(SIJ) \perp (ABCD)$.



I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên AB, CD suy ra $AB \perp SI, CD \perp SJ$.

$\begin{cases} AB \,//\, CD \\ SJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SJ$

$\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp SJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ), AB \subset (ABCD) \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$.

2. ***Chứng minh*** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên AD và BC.

Chứng minh tương tự như câu 1) ta có $(SEF) \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của EF và IJ, ta có

$\begin{cases} SO = (SEF) \cap (SIJ) \\ (SEF) \perp (ABCD), (SIJ) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\begin{cases} AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ (SIJ) \perp AB \\ (SAB) \cap (SIJ) = SI, (SIJ) \cap (ABCD) = IJ \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAB),(ABCD)) = (SI, IJ) = \widehat{SIO}$ (do O ở trong đoạn IJ và tam giác SOI vuông tại I nên $\widehat{SIO}$ nhọn)

Theo giả thiết $\widehat{SIO} = \alpha$.

Tương tự $((SAD),(ABCD)) = \widehat{SEO} = \alpha$.

Hai tam giác SOI và SOE vuông tại O và có $\hat{I} = \hat{E} = \alpha$ nên chúng bằng nhau

$\Rightarrow OI = OE$

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ O đến hai cạnh AB và AD bằng nhau

$\Rightarrow O$ thuộc đường phân giác của $\widehat{DAB}$

Mà AC là đường phân giác của $\widehat{DAB}$ (tính chất hình vuông) do đó $O \in AC \Rightarrow SO \subset (SAC)$.

Hơn nữa $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

Tính $d(S,(ABCD))$.

$d(O,(ABCD)) = SO$

Đặt $SO = x, OF = y$.

Tam giác vuông OCF cho : $OC = y\sqrt{2}$

Tam giác vuông SEO cho : $EO = \frac{SO}{\tan\alpha} = \frac{x}{\tan\alpha}$

Mặt khác : $EO = EF - FO = a - y$

Suy ra $a - y = \frac{x}{\tan\alpha} \Rightarrow y = a - \frac{x}{\tan\alpha}$ (1)

Hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ là CO

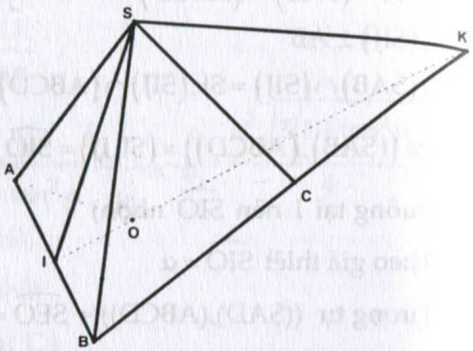
$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC, OC) = \widehat{SCO} = \beta$.

Tam giác vuông SOC cho : $SO = OC\tan\beta = y\sqrt{2}\tan\beta$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cot\alpha + \cot\beta}$.

Vậy $d(O,(ABCD)) = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cot\alpha + \cot\beta}$.

118.



1. $(SAB)\perp(SBC) \Leftrightarrow \widehat{ISK} = 90^0$.

O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, $SA = SB = SC$ và I là trung điểm của AB suy ra $SO\perp(ABC)$ và $OI\perp AB$.

$\begin{cases} AB\perp OI \\ AB\perp SO \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SIK) \Rightarrow AB\perp SK$

Do đó nếu $\widehat{ISK} = 90^0$ thì $SK\perp SI$.

$\begin{cases} SK\perp AB \\ SK\perp SI \end{cases} \Rightarrow SK\perp(SAB), SK\subset(SBC) \Rightarrow (SAB)\perp(SBC)$

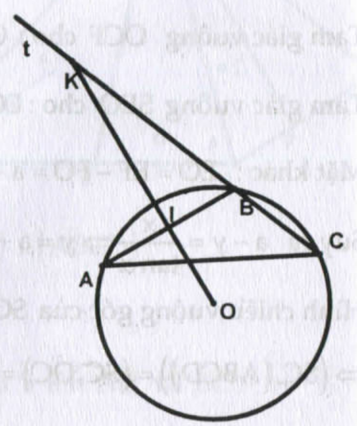
Nếu $(SBC)\perp(SAB)$, khi đó ta có

$\begin{cases} SK = (SIK)\cap(SBC) \\ (SIK)\perp(SAB),(SBC)\perp(SAB) \end{cases} \Rightarrow SK\perp(SAB)$

$\Rightarrow SK\perp SI \Rightarrow \widehat{ISK} = 90^0$

Vậy $(SAB)\perp(SBC) \Leftrightarrow \widehat{ISK} = 90^0$.

2. ***Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau là tam giác ABC có ba góc nhọn và*** $\tan\alpha.\tan\beta = \dfrac{5}{4}$.



Áp dụng kết quả câu 1) ta có $(SAB)\perp(SBC) \Leftrightarrow$ Tam giác ISK vuông tại $S \Leftrightarrow O$ ở trong đoạn IK và $OI.OK = SO^2 = 4R^2$ (do SO là đường cao của tam giác ISK).

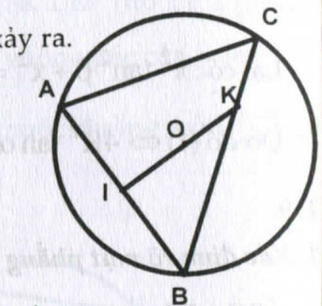
K là giao điểm của IO với BC .

Nếu $\widehat{ABC}$ là góc tù thì K ở trên tia Bt nằm trên đường thẳng BC (xem hình vẽ bên)

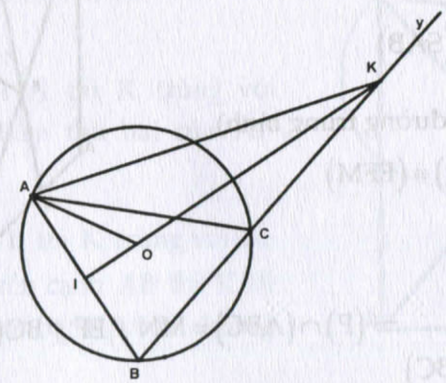
Khi đó O ở ngoài đoạn IK mà O phải ở trong đoạn IK nên $\widehat{ABC}$ không thể là góc tù.

Nếu $\widehat{ABC}$ vuông thì $OI // BC$ khi đó điểm K không tồn tại ,vậy $\widehat{ABC}$ không thể vuông .

Do đó $\widehat{ABC}$ là góc nhọn. Khi đó có hai khả năng xảy ra.



* K thuộc đoạn BC , trường hợp này không thể xảy ra vì $OI < R, OK < 2R$ $\Rightarrow OI.OK < 4R^2$.
* Vậy K phải thuộc tia Cy nằm đường thẳng BC (xem hình vẽ dưới)



Vì O và C ở cùng một phía đối với đường thẳng AB nên góc $\widehat{ACB}$ nhọn .

Tam giác AKB cân tại $K \Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{ABC}$,vì $\widehat{BAC} < \widehat{BAK} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC}$ nhọn nên $\widehat{BAC}$ nhọn.

Vậy tam giác ABC có ba góc nhọn.

Đặt $OI = x(x>0)$, $OK.OI = 4R^2 \Leftrightarrow OK = \dfrac{4R^2}{x}$.

Ta có $\beta = \widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOI}$.

Trong tam giác vuông AIO: $\tan\beta = \dfrac{AI}{OI} \Rightarrow AI = x\tan\beta$.

$\widehat{ABC} = \pi - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) = \pi - (\alpha + \beta) \Rightarrow \tan\widehat{ABC} = -\tan(\alpha + \beta)$

Trong tam giác vuông BIK, $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{KI}{IB}$

$$\Leftrightarrow -\tan(\alpha+\beta) = \frac{KI}{IB} = \frac{OI + OK}{IA} \Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1} = \frac{x + \frac{4R^2}{x}}{x\tan\beta} = \frac{4R^2 + x^2}{x^2\tan\beta}$$

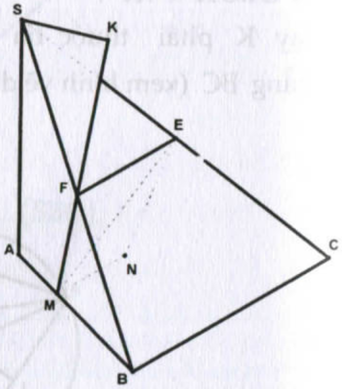
$\Leftrightarrow 4R^2\tan\alpha\tan\beta = 4R^2 + x^2\tan\beta + x^2\ (1)$

Lại có : $x^2\tan^2\beta + x^2 = IA^2 + OI^2 = OA^2 = R^2$

Do đó (1) $\Leftrightarrow 4R^2\tan\alpha.\tan\beta = 5R^2 \Leftrightarrow \tan\alpha.\tan\beta = \dfrac{5}{4}$.

119.

1. Xác định rõ mặt phẳng (P).



$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

EF // BC (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow EF \perp (SAB) \Rightarrow (P) \equiv (EFM)$

Xác định thiết diện .

$\begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ EF \mathbin{/\!/} BC \\ EF \subset (P), BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MN \mathbin{/\!/} EF \mathbin{/\!/} BC\ (N \in AC)$

Suy ra thiết diện của (P) với hình chóp đã cho là tứ giác EFNM, tứ giác này có EF // MN và $EF \perp FM$ (do $EF \perp (SAB)$) nên thường là hình thang vuông tại F và M (tứ giác là hình chữ nhật khi M là trung điểm của AB.)

Diện tích thiết diện .

$EF = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{AM.BC}{AB} = x.$

Tam giác vuông SAB (vuông tại A) có $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ nên là một nửa tam giác đều, suy ra $\widehat{SBA} = 60^0$ và $SB = 2a$.

Áp dụng định lí hàm Côsin trong tam giác FMB, ta có:

$FM^2 = BM^2 + BF^2 - 2BM.BF.\cos 60^0 = (a-x)^2 + a^2 - 2(a-x).a.\dfrac{1}{2} = a^2 - ax + x^2$

$\Rightarrow FM = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$

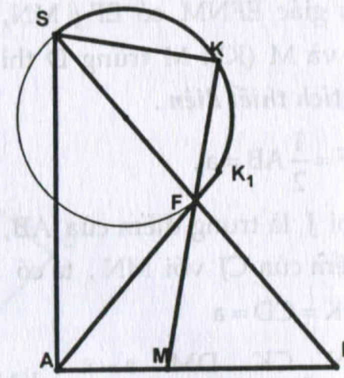
$S_{EFMN} = \dfrac{1}{2}(EF + MN).FM = \dfrac{1}{2}(a + x)\sqrt{a^2 + x^2 - ax} = \dfrac{(a+2x)\sqrt{a^2 + x^2 - ax}}{4}$

2.Tìm tập hợp các điểm K

Dựng SK vuông góc FM tại K. Ta có: $SK \perp FM$, $SK \perp EF$ (do $EF \perp (SAB)$, $SK \subset (SAB)$),suy ra $SK \perp (P)$ tức là K là hình chiếu vuông góc của S lên (P)

Trong mặt phẳng (SAB), $\widehat{SKF} = 1v$, suy ra K thuộc đường tròn (C) cố định đường kính SF chứa trong mặt phẳng (SAB).

Giới hạn



K là giao điểm thứ hai của MF với (C) suy ra

Khi M trùng với A thì K trùng với K_1 (K_1 là giao điểm thứ hai của AF với (C)).

Khi M trùng với B thì K trùng với S.

Khi M di đông trên cạnh AB thì K di động trên cung nhỏ SK_1 của đường tròn (C).

Phần đảo. Lấy điểm K bất kỳ thuộc cung nhỏ SK_1 của (C), ta chứng minh tồn tại một điểm M trên cạnh AB sao cho K là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (P).

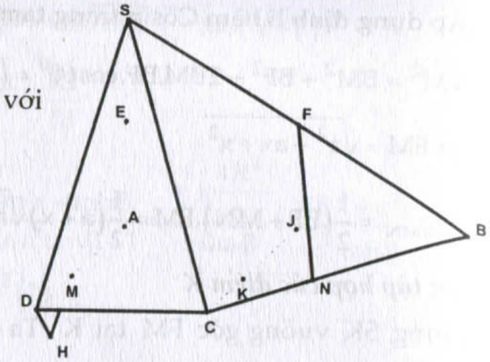
Dựng M là giao điểm của FK với cạnh AB, gọi (P) là mặt phẳng (EFM), do $EF \perp (SAB)$ nên (P) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAB).

Mặt khác $SK \perp EF, SK \perp FM$ nên $SK \perp (P)$ suy ra SK là hình chiếu vuông góc của S lên (P).

Vậy tập hợp các điểm K là cung nhỏ SK_1 của đường tròn (C).

120.

1.Xác định (P).



(SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$ suy ra $SA \perp (ABCD)$.

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Gọi F là trung điểm của SB thì: $EF /\!/ AB$ suy ra $EF \perp (SAD)$

$\Rightarrow EF \perp (SAD)$. Vậy $(P) \equiv (EFM)$

2. Xác định thiết diện .

Qua M dựng đường thẳng $d /\!/ AB /\!/ EF$ cắt BC tại N , ta có MN thuộc (P) suy ra thiết diện của (P) với hình chóp S.ABCD là tứ giác EMNF .

Tứ giác EFNM có $EF /\!/ MN, EF \perp EM$ nên thường là hình thang vuông tại E và M (Khi M trùng D thì thiết diện là hình chữ nhật).

Diện tích thiết diện .

$EF = \frac{1}{2}AB = a$.

Gọi J là trung điểm của AB, tứ giác AJCD là hình vuông , gọi K là giao điểm của CJ với MN , ta có

$MK = CD = a$

$\frac{KN}{JB} = \frac{CK}{CJ} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow KN = \frac{(a-x)JB}{a} = \frac{(a-x)a}{a} = a - x$

$\Rightarrow MN = MK + KN = a + a - x = 2a - x$

Tam giác vuông EAM cho

$EM^2 = EA^2 + AM^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 \Rightarrow EM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}$

Diện tích thiết diện

$S_{EFNM} = \frac{1}{2}(EF + MN)EM = \frac{1}{2}(a + 2a - x)\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{(3a-x)\sqrt{a^2+4x^2}}{4}$

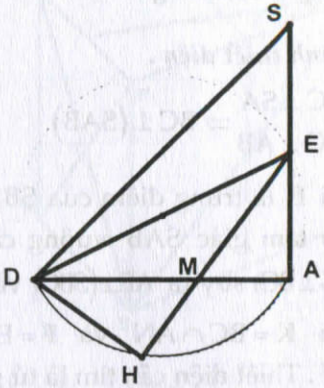
***3.Tập hợp hình chiếu vuông góc của* D *lên* (P)**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên EM , ta có

$\begin{cases} DH \perp EM \\ DH \perp EF \end{cases} \Rightarrow DH \perp (P)$. Vậy H là hình chiếu vuông góc của D lên (P).

Trong mặt phẳng (SAD), $\widehat{DHE} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn (C) đường kính DE chứa trong mặt phẳng (SAD).

Giới hạn .



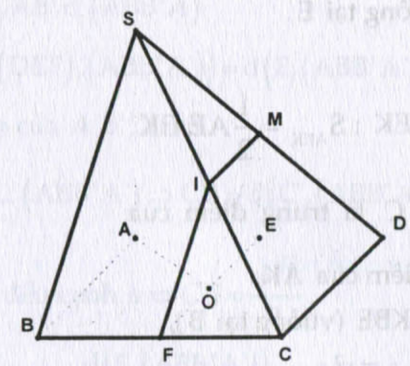
H là giao điểm thứ hai của EM với (C), suy ra khi M di động trên đoạn AD thì H di động trên cung nhỏ AD của đường tròn (C).

Phần đảo (bạn đọc tự giải).

Vậy tập hợp các điểm H là cung nhỏ AD của đường tròn (C).

121.

1. (P) *qua tâm* O *của đáy* ABCD, *trung điểm* M *của* SD *và vuông góc với* $(ABCD)$.



Xác định thiết diện .

Gọi E là trung điểm của AD, ta có $ME /\!/ SA$ (tính chất đường trung bình), $SA \perp (ABCD) \Rightarrow ME \perp (ABCD)$. Vậy $(P) \equiv (MOE)$.

Gọi F và I lần lượt là trung điểm của BC và SC, ta có $F \in OE, MI /\!/ EF$ (cùng song song CD) suy ra $MI \subset (P)$ do đó thiết diện của (P) với hình chóp đã cho là tứ giác MEFI.

Tứ giác MEFI có $MI /\!/ EF, MI = \frac{1}{2}a, ME \perp EF$ nên là hình thang vuông tại M và E.

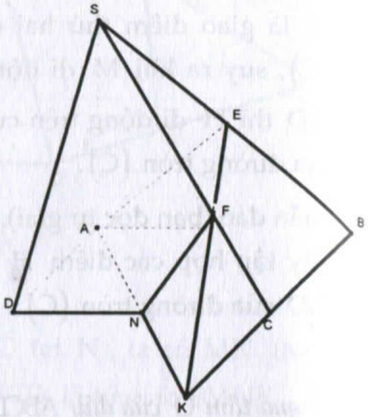
Diện tích thiết diện .

$EF = a, MI = \frac{1}{2}a, ME = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}a$

Suy ra $S_{MEFI}=\frac{1}{2}(MI+EF).ME=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)\frac{a}{2}=\frac{3a^2}{8}$

2. (P) *qua* A, *trung điểm* N *của* CD *và vuông góc với* (SBC).

Xác định thiết diện.



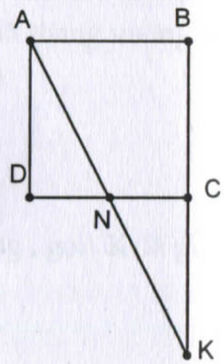
$\begin{cases}BC\perp SA\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$

Gọi E là trung điểm của SB thì $AE\perp SB$ (do tam giác SAB vuông cân tại A) và $AE\perp BC$, suy ra $AE\perp(SBC)$ và $(AEN)\equiv(P)$.

Gọi $K=BC\cap AN$ và $F=EK\cap SC$. Nối NF. Thiết diện cần tìm là tứ giác ANFE.

$AE\perp(SBC), EK\subset(SBC)\Rightarrow AE\perp EK$

$\Rightarrow$ tam giác AEK vuông tại E.



Diện tích thiết diện.

Diện tích tam giác AEK : $S_{AEK}=\frac{1}{2}AE.EK$

$CN\,//\!=\frac{AB}{2}$, suy ra C là trung điểm của BK và N là trung điểm của AK.

Xét tam giác vuông KBE (vuông tại B),

$$KE^2=BE^2+BK^2=\left(\frac{a\sqrt2}{2}\right)^2+(2a)^2=\frac{2a^2}{4}+4a^2=\frac{18a^2}{4}\Rightarrow KE=\frac{3a\sqrt2}{2}$$

Xét tam giác vuông SAB, ta có $AE=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt2}{2}$.

Do đó $S_{AEK}=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt2}{2}.\frac{3a\sqrt2}{2}=\frac{3a^2}{4}$

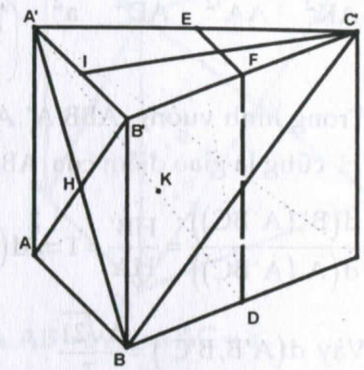
SC, KF là hai đường trung tuyến của tam giác SBK nên giao điểm F của chúng là trọng tâm của tam giác SBK, suy ra $\frac{KF}{KE}=\frac{2}{3}$.

$$\frac{S_{KFN}}{S_{KEA}}=\frac{KF}{KE}.\frac{KN}{KA}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra diện tích thiết diện : $S_{AEFN}=\frac{2}{3}S_{KAE}=\frac{a^2}{2}$

122.

1. *Tính* $d(DE,AB')$



Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình vuông cạnh a suy ra các cạnh bên của hình lăng trụ này vuông góc với mặt phẳng đáy (ABB'A', ACC'A' là các hình vuông)

$\Rightarrow AA'\perp AB, AA'\perp AC\Rightarrow AA'\perp(ABC)$

và hai đáy là hai tam giác đều cạnh a.

$\begin{cases}EF\,//\,A'B'\\ FD\,//\,BB'\end{cases}\Rightarrow(DEF)\,//\,(ABB'A), DE\subset(DEF), AB'\subset(ABB'A)$

Lại có $DE\subset(DEF), AB'\subset(ABB'A)$

$\Rightarrow d(AB',DE)=d((DEF),(ABB'A'))=d(E,(ABB'A'))$

Gọi I là trung điểm của A'B', ta có

$\begin{cases}C'I\perp A'B'\\ C'I\perp AA'\end{cases}\Rightarrow C'I\perp(ABB'A')\Rightarrow C'I=d(C',(ABB'A'))$

A'B'C' là tam giác đều cạnh $a\Rightarrow C'I=\frac{a\sqrt3}{2}$.

$$C'E\cap(ABB'A)=\{A'\}\Rightarrow\frac{d(E,(ABB'A'))}{d(C',(ABB'A'))}=\frac{AE}{AC'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(E,(ABB'A'))=\frac{1}{2}d(C',(ABB'A'))=\frac{1}{2}C'I=\frac{a\sqrt3}{4}\Rightarrow d(DE,AB')=\frac{a\sqrt3}{4}$$

2. *Tính* $d(A'B,B'C')$.

$B'C'\,//\,BC\Rightarrow B'C'\,//\,(A'BC), A'B\subset(A'BC)$

$\Rightarrow d(A'B,B'C')=d(B',(A'BC))$

Gọi D là trung điểm của BC, K là hình chiếu vuông góc của A lên A'D, ta có

$\begin{cases}BC\perp AD\\ BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(ADA')\Rightarrow BC\perp AK$

$\begin{cases}AK\perp BC\\ AK\perp A'D\end{cases}\Rightarrow AK\perp(A'BC)\Rightarrow AK=d(A,(A'BD))$

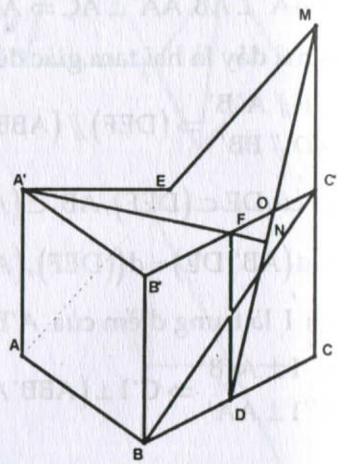
Trong tam giác vuông $A'AD$:

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Trong hình vuông $ABB'A', AB'$ cắt $A'B$ tại trung điểm H của mỗi đoạn; H cũng là giao điểm của AB' với $(A'BC)$ suy ra

$$\frac{d(B',(A'BC))}{d(A,(A'BC))}=\frac{HB'}{HA}=1\Rightarrow d(B',(A'BC))=d(A,(A'BC))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(A'B,B'C')=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.



3. ***Tính*** $d(DE, A'F)$

$A'F \parallel AD \Rightarrow A'F \parallel (ADE)$

$\Rightarrow d(A'F,DE)=d(F,(ADE))$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A'), AE$ cắt CC' tại M, vì $EC \parallel AC, EC=\frac{1}{2}AC$ nên EC là đường trung bình trong tam giác ACM suy ra C' là trung điểm của CM.

Trong mặt phẳng $(BCC'B'), DM$ cắt $B'C'$ tại $O, ON=\frac{1}{2}CD=\frac{a}{4}$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của F lên DM, ta có

$$\begin{cases}AD\perp BC\\ AD\perp CC'\end{cases}\Rightarrow AD\perp(BCC'B')\Rightarrow AD\perp FN$$

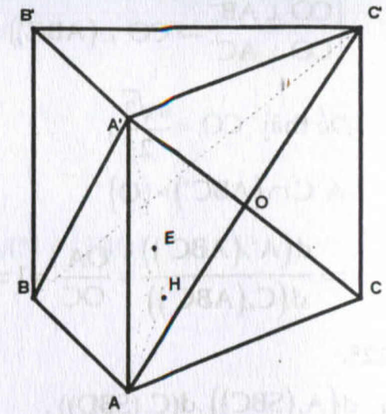
$$\begin{cases}FN\perp DM\subset(ADE)\\ FN\perp AD\end{cases}\Rightarrow FN\perp(ADE)\Rightarrow FN=d(F,(ADE))$$

Trong tam giác vuông FOD, FN là đường cao suy ra

$$\frac{1}{FN^2}=\frac{1}{FD^2}+\frac{1}{FO^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{17}{a^2}\Rightarrow FN=\frac{a\sqrt{17}}{17}\Rightarrow d(F,(ADE))=\frac{a\sqrt{17}}{17}$$

Vậy $d(A'F,DE)=\frac{a\sqrt{17}}{17}$

123.



1. ***Tính*** $d(AA',(BCC'B'))$.

$AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$

$\Rightarrow d(AA',(BCC'B'))=d(A,(BCC'B'))$.

Dựng $AH\perp BC(H\in BC)$, ta có

$$\begin{cases}AH\perp BC\\ AH\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$$

$\Rightarrow AH=d(A,(BCC'B'))$

Tam giác vuông ABC vuông tại A, $BC=2a, AB=a\sqrt{3}\Rightarrow AC=a$,

$$AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $d(AA',(BCC'B'))=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

2. ***Tính*** $d(A,(A'BC))$.

Dựng $AE\perp A'H(E\in A'H)$

$$\begin{cases}BC\perp AH\\ BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp AE$$

$$\begin{cases}AE\perp BC\\ AE\perp A'H\end{cases}\Rightarrow AE\perp(A'BC)\Rightarrow AE=d(A,(A'BC))$$

Trong tam giác vuông $A'AH$,

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AA'^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AE^2=\frac{3a^2}{7}.$$

$\Rightarrow AE=d(A,(A'BC))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

3. ***Chứng minh*** $AB\perp(ACC'A')$.

$$\begin{cases}AB\perp AC\\ AB\perp A'A\end{cases}\Rightarrow AB\perp(ACC'A')$$

Tính $d(A',(ABC'))$.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình chữ nhật có $AC=AA'=a$ nên là hình vuông, suy ra $AC'\perp A'C$, gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$, ta có

$$\begin{cases} CO\perp AB \\ CO\perp AC' \end{cases} \Rightarrow CO\perp (ABC') \Rightarrow CO=d(C,(ABC'))$$

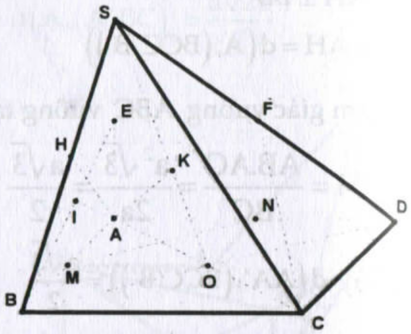
Dễ thấy $CO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A'C\cap(ABC')=\{O\}$

$$\Rightarrow \frac{d(A',(ABC'))}{d(C,(ABC'))}=\frac{OA'}{OC}=1\Rightarrow d(A'(ABC'))=d(C,(ABC'))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

125.

1. $d(A,(SBC)), d(C,(SBD))$.



Dựng $AH\perp SB\,(H\in SB)$, ta có

$$\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SAB) \Rightarrow BC\perp AH$$

$$\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp SB \end{cases} \Rightarrow AH\perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AH=d(A,(SBC))$$

Trong tam giác vuông SAB, $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2}$

$$\Rightarrow AH^2=\frac{4a^2}{5}\Rightarrow AH=\frac{2A\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d(A,(SBC))=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, dựng $AK\perp SO, (K\in SO)$.

$$\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAC) \Rightarrow BD\perp AK$$

$$\begin{cases} AK\perp SO \\ AK\perp BD \end{cases} \Rightarrow AK\perp (SBD) \Rightarrow AK=d(A,(SBD))$$

Trong tam giác vuông SAO, $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{9}{4a^2}$

$$\Rightarrow AK^2=\frac{4a^2}{9}\Rightarrow AK=d(A,(SBD))=\frac{2a}{3}$$

$$AC\cap(SBD)=\{O\}\Rightarrow \frac{d(C,(SBD))}{d(A,(SBD))}=\frac{OC}{OA}=1$$

$$\Rightarrow d(C,(SBD))=d(A,(SBD))=\frac{2a}{3}$$

2. Chứng minh $MN \parallel (SBD)$, *tính* $d(MN,(SBD))$.

$MN \parallel BD$ (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow MN\parallel (SBD)$

$$\Rightarrow d(MN,(SBD))=d(M,(SBD))$$

$$AM\cap(SBD)=\{B\}\Rightarrow \frac{d(M,(SBD))}{d(A,(SBD))}=\frac{BM}{BA}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(M,(SBD))=\frac{1}{2}d(A,(SBD))=\frac{a}{3}$$

Vậy $d(MN,(SBD))=\dfrac{a}{3}$

3. Tính $d(S,(P))$, *diện tích tứ giác* $BCFE$.

$$AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel (P)\Rightarrow d(AD,(P))=d(A,(P))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên AE.

$$\begin{cases} AI\perp BC \\ AI\perp BE \end{cases} \Rightarrow AI\perp (P)\Rightarrow AI=d(A,(P))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Trong tam giác vuông BAE, $\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AE^2}\Rightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{AE^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AE=a\Rightarrow E$ là trung điểm của SA.

$BC\parallel AD, EF=(P)\cap(SAD)\Rightarrow EF\parallel AD\parallel BC$

$\Rightarrow EF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$ (tính chất đường trung bình)

$BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp BE$

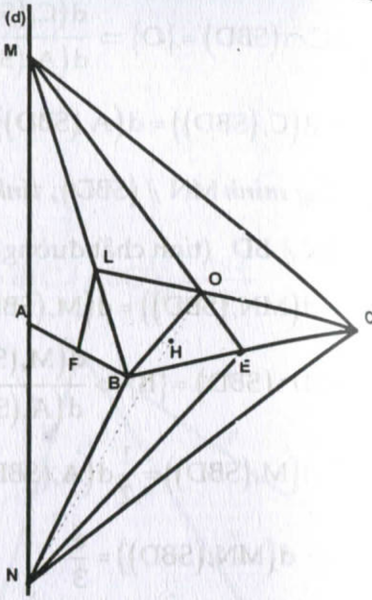
Do đó tứ giác $BCFE$ là hình thang vuông tại B và E.

Diện tích hình thang vuông $BCFE$.

$$S_{BCFE}=\frac{1}{2}(BC+EF).BE=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2+a^2}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

126.

*1. **Chứng minh*** $OH \perp (MBC)$.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AB; L là giao điểm CO và MB ta có

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp MA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (MAE), OH \subset (MAE)$$

$$\Rightarrow OH \perp BC$$

$$\begin{cases} CF \perp AB \\ CE \perp MA \end{cases} \Rightarrow CF \perp (MAB) \Rightarrow CF \perp MB$$

$$\begin{cases} MB \perp CF \\ MB \perp CL \end{cases} \Rightarrow MB \perp (CFL)$$

$$\Rightarrow MB \perp OH \ (\text{do } OH \subset (CFL))$$

$$\begin{cases} OH \perp MB \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (MBC)$$

2. ***Tìm tập hợp điểm*** O ***khi*** M ***di động trên*** (d).

$$OH \Rightarrow OH \perp ME \Rightarrow \widehat{HOE} = 90^0$$

Trong mặt phẳng cố định $(E,(d)), \widehat{HOE} = 90^0$, suy ra tập hợp cac điểm O là đường tròn (C) đường kính HE loại bỏ điểm E.

3. ***Chứng minh tứ diện*** $BCMN$ ***có các cặp cạnh đối vuông góc.***

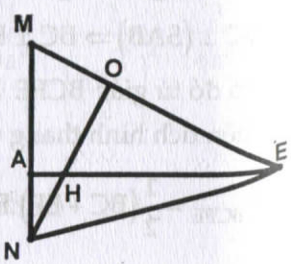
$$MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp BC$$

$$\begin{cases} MB \perp (CFL) \\ NC \subset (CFL) \end{cases} \Rightarrow MB \perp NC$$

$$\begin{cases} MC \perp OH \ (\text{do } OH \perp (MBC)) \\ MC \perp BO \end{cases} \Rightarrow MC \perp (OBN) \Rightarrow NC \perp MB$$

Vậy tứ diện $BCMN$ có các cặp cạnh đối vuông góc.

4. ***Chứng minh AM.AN không đổi.***



NO, EA là hai đường cao trong tam giác MEN nên H là trực tâm của tam giác này.

Hai tam giác vuông AHN và AME đồng dạng suy ra $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{AH}{AN} \Rightarrow AM.AN = AH.AE$

Mặt khác tam giác ABC là tam giác đều cạnh a, H là trực tâm của tam giác ABC suy ra $AH.AE = \dfrac{2}{3}AE^2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $AM.AN = \dfrac{a^2}{2}$ không đổi.

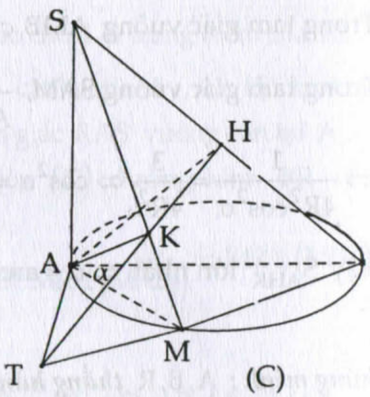
Tính AM, AN để độ dài MN nhỏ nhất.

$$MN = AM + AN \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{AM.AN} = 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$$

$$MN = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AM = AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $a\sqrt{2}$ đạt được khi và chỉ khi $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

127.



1.Chứng minh (SAM) ***vuông góc*** (SBM).

$$\begin{cases} BM \perp MA \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAM), BM \subset (SBM)$$

$$\Rightarrow (SBM) \perp (SAM)$$

2.Chứng minh tứ giác $BHKM$ ***nội tiếp.***

$AK \subset (SAM), MB \perp (SAM) \Rightarrow AK \perp MB (1)$

Lại có $AK \perp SM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK \perp (SMB) \Rightarrow AK \perp SB$

$$\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp AH \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp KH$$

Trong mặt phẳng (SBM), tứ giác $BHKM$ có $\widehat{M} = \widehat{H} = 90^0$ nên nội tiếp được.

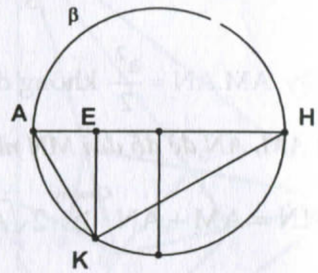
Giao điểm T ***của*** HK ***và*** BM ***ở trên một đường thẳng cố định.***

Ta có $\begin{cases} AT \subset (P) \Rightarrow AT \perp SA \\ AT \subset (AHK) \Rightarrow AT \perp SB \end{cases} \Rightarrow AT \perp (SAB)$

Vậy T di động trên đường thẳng cố định là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SAB).

3.Tìm giá trị của α để diện tích tam giác AHK lớn nhất.

Trong mặt phẳng (AHK), $\widehat{AKH}=90^0$ nên K di động trên đường tròn (β) đường kính AH.



Diện tích tam giác AHK: $S_{AHK} == \frac{1}{2}AH.HE$

Vì AH có độ dài không đổi nên S_{AHK} lớn nhất khi và chỉ khi HE lớn nhất

$\Leftrightarrow$ K là trung điểm của cung AH

$\Leftrightarrow$ Tam giác AKH vuông cân tại K.

Tam giác vuông SAB có $SA = AB = 2R$ nên vuông cân tại A

$\Rightarrow SB = 2R\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}SB = R\sqrt{2}$

Tam giác AKH vuông cân tại $K \Leftrightarrow AK = \frac{AH}{\sqrt{2}} = R$

Trong tam giác vuông AMB cho $AM = AB.\cos\alpha = 2R\cos\alpha$

Trong tam giác vuông SAM, $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{4R^2.\cos^2\alpha}$

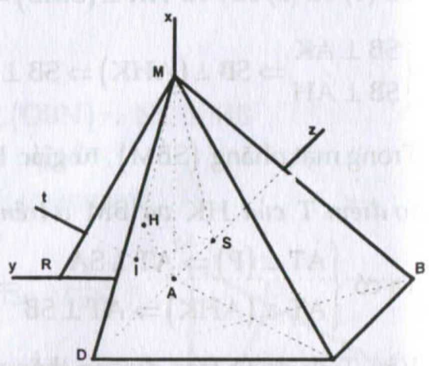
$\Leftrightarrow \frac{1}{4R^2\cos^2\alpha} = \frac{3}{4R^2} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{3}$

Vậy S_{AHK} lớn nhất $\Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{3}$

128.

1.Chứng minh : A, B, R thẳng hàng và A, D, S thẳng hàng.

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp MA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (MAB)$



Gọi d_1 là đường thẳng qua M vuông góc với (SBC), ta có

$d_1 \perp BC \Rightarrow d_1 \subset (MAB)$

$R = d_1 \cap (P) \Rightarrow R \in (MAB) \cap (P)$

mà $(MAB) \cap (P) = AB$

Vậy A, B, R thẳng hàng.

Tương tự A, D, S thẳng hàng.

2.Tập hợp trung điểm I của RS khi M di động trên tia Ax.

$MR \perp (MBC) \Rightarrow MR \perp MB \Rightarrow$ Tam giác BMR vuông tại M, MA là đường cao của tam giác này $\Rightarrow MA^2 = AR.AB$

Tương tự $MA^2 = AS.AD$

Suy ra $AR.AB = AS.AD \Rightarrow AR = AS$ (do AB=AD)

$\Rightarrow \Delta SAR$ vuông cân tại A

$\Rightarrow RS // BD$ và trung điểm I của RS thuộc đường thẳng AC

Giới hạn : Vì M di động trên tia Ax và $MR \perp MB$ nên R di động trên tia Ay nằm trên đường thẳng AB và cùng hướng với $\overrightarrow{BA}$, tương tự S di động trên tia Az nằm trên đường thẳng AD cùng hướng với $\overrightarrow{DA}$, suy ra I di động trên tia At nằm trên đường thẳng AC cùng hướng với $\overrightarrow{CA}$.

Đảo lại : Gọi I là một điểm tùy ý trên tia At, ta phải dựng điểm M trên tia Ax để đường thẳng qua M vuông góc với (MBC) cắt (P) tại R, đường thẳng qua M vuông góc với (MDC) cắt (P) tại S sao cho I là trung điểm của RS.

Qua I dựng đường thẳng song song với BD cắt hai tia Ay, Az lần lượt tại R và S thì I là trung điểm của đoạn RS và tam giác RAS vuông cân tại A.

Trong mặt phẳng (B, Ay) dựng đường tròn (C) đường kính BR cắt tia Ax tại M. Khi đó $\begin{cases} MR \perp MB \\ MR \perp BC \text{ (do } BC \perp (MAB), MR \perp (MAB)) \end{cases} \Rightarrow MR \perp (MBC)$

$MS \subset (MAD), DC \perp (MAD) \Rightarrow MS \perp DC$

Tam giác RAS vuông cân tại $A \Rightarrow AS = AR \Rightarrow AS.AD = AR.AB = MA^2$

$\Rightarrow$ Tam giác MSD vuông tại $M \Rightarrow MS \perp MD$

$\begin{cases} MS \perp MD \\ MS \perp DC \end{cases} \Rightarrow MS \perp (MDC)$

Vậy tập hợp các điểm I là tia At.

3. Chứng minh AH vuông góc với mặt phẳng (MRS).

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp MA \end{cases} \Rightarrow MA \perp (MAC)$

$RS // BD \Rightarrow RS \perp (MAC), AH \subset (MAC) \Rightarrow RS \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp MI \\ AH \perp RS \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MRS)$

H *là trực tâm của tam giác* MRS.

$MI \subset (SAC) \Rightarrow MI \perp RS$

$$\begin{cases} MR \perp AH \\ MR \perp BC, AD \,//\, BC \Rightarrow MR \perp AD \end{cases} \Rightarrow MR \perp (HAD) \Rightarrow MR \perp HS$$

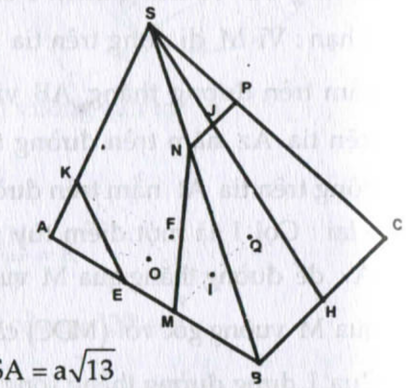
Vậy H là trực tâm của tam giác MRS.

130.

1.Chứng minh BC ***vuông góc với*** SA ***và tính*** SO, SA, SH ***theo*** a.

$$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$$

$$\Rightarrow BC \perp SA$$



Tam giác đều ABC có đường cao

$AH = 3a \Rightarrow BC = \dfrac{2AH}{\sqrt{3}} = 2a\sqrt{3}$

$OS = BC \Rightarrow OS = 2a\sqrt{3}$

Tam giác vuông SOA.

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(2a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 = 13a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{13}$

Tam giác vuông SOH.

$SH^2 = SO^2 + OH^2 = \left(2a\sqrt{3}\right)^2 + 4a^2 = 16a^2 \Rightarrow SH = 4a$

2.Tính $\left((SAB),(SAC)\right)$.

Qua O dựng đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F, gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên SA.

$EF \,//\, BC, BC \perp (SAH) \Rightarrow EF \perp (SAH) \Rightarrow EF \perp SA$

$$\begin{cases} SA \perp EF \\ SA \perp OK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (EFK) \Rightarrow \left((SAB),(SAC)\right) = (KE, KF)$$

$KO \perp EF$ tại trung điểm O của EF nên tam giác KEF cân tại K.

$\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AO}{AH} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông SOA, $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{\left(2a\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2}$

$= \dfrac{1}{12a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{13}{12a^2} \Rightarrow OK^2 = \dfrac{12a^2}{13} \Rightarrow OK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

Trong tam giác vuông KOE $\tan\widehat{EKO} = \dfrac{OE}{OK} = \dfrac{\frac{1}{2}EF}{OK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$

$\Rightarrow \widehat{EKO} = \arctan\dfrac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \widehat{EKF} = 2\arctan\dfrac{\sqrt{13}}{6} < 90^0 \Rightarrow \left((SAB),(SAC)\right) = 2\arctan\dfrac{\sqrt{13}}{6}$

3.Chứng minh $MNPQ$ ***là hình thang cân.***

$\alpha \perp OH, BC \perp OH \Rightarrow BC \,//\, \alpha$

$$\begin{cases} \alpha \,//\, BC \\ \alpha \cap (ABC) = MQ \Rightarrow MQ \,//\, NP \,//\, BC \ (1) \\ \alpha \cap (SBC) = NP \end{cases}$$

I là trung điểm của MQ, gọi J là giao điểm của NP và SH thì J là trung điểm của NP.

$SO \perp OH, \alpha \perp OH \Rightarrow SO \,//\, \alpha$

$IJ = \alpha \cap (SAH) \Rightarrow IJ \,//\, SO \Rightarrow IJ \perp MQ, IJ \perp NP \ (2)$

Từ (1), (2) suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

4.Diện tích $MNPQ$ ***theo*** a ***và*** $x = AI$.

$I \in OH \Rightarrow a < x < 3a$

$\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{AI}{AH} = \dfrac{x}{3a} \Rightarrow MQ = \dfrac{x.BC}{AH} = \dfrac{2ax\sqrt{3}}{3a} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{IJ}{SO} = \dfrac{HI}{HO} = \dfrac{3a - x}{2a} \Rightarrow IJ = \dfrac{2a\sqrt{3}(3a - x)}{2a} = \sqrt{3}(3a - x)$

$\dfrac{MP}{BC} = \dfrac{SJ}{SH} = \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{x - a}{2a} \Rightarrow MP = \dfrac{2a\sqrt{3}(x - a)}{2a} = \sqrt{3}(x - a)$

Diện tích thiết diện $MNPQ$:

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP)IJ = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2x\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}(x - a).\sqrt{3}(3a - x)\right] = \dfrac{1}{2}(5x - 3a)(3a - x)$

Xác định x để S_{MNPQ} ***lớn nhất.***

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{10}(5x - 3a)(15a - 5x) \overset{\text{Cauchy}}{\le} \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{5x - 3a + 15a - 5x}{2}\right)^2 = \dfrac{18a^2}{5}$

$S_{MNPQ} = \dfrac{18a^2}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3a = 15a - 5x \\ x \in (a, 3a) \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{9a}{5}$

Vậy S_{MNPQ} lớn nhất $\Leftrightarrow x = \dfrac{9a}{5}$

CHỦ ĐỀ:

ỨNG DỤNG CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Phép nghịch đảo

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M khác O thành điểm sao cho M' thuộc đường thẳng OM và $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ được gọi là phép nghịch đảo cực O, phương tích k.

Kí hiệu phép nghịch đảo cực O, phương tích k là f_O^k.

Vậy $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in OM \\ \overline{OM'}.\overline{OM} = k \end{cases}$.

Khi M tiến lại gần cực nghịch đảo O thì M' tiến càng ra xa O, nghĩa là $M \to O$ thì $f_O^k(M) = M' \to \infty$.

2. Tính chất.

Tính chất 1.

Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp, tức $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow f_O^k(M') = M$ (trong chuyên đề này ta dùng kí hiệu f thay cho f_O^k nếu không gây hiểu nhầm)

Tính chất 1 là hiển nhiên vì $f(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = k$

$\Leftrightarrow \overline{OM'}.\overline{OM} = k \Leftrightarrow f(M') = M$.

Từ tính chất trên ta có $f^2(M) = f \circ f(M) = f(M') = M \Rightarrow f^2$ là phép đồng nhất.

Nếu $f(M) = M$ thì M được gọi là điểm kép của f.

Tính chất 2.

Nếu $k < 0$ thì hiển nhiên f không có điểm kép.

Nếu $k > 0$ thì tập hợp các điểm kép của f là đường tròn $(O; \sqrt{k})$. Đường tròn này được gọi là đường tròn nghịch đảo của f.

Thật vậy, $f(M) = M \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM} = k > 0 \Leftrightarrow OM = \sqrt{k} \Leftrightarrow M \in (O; \sqrt{k})$.

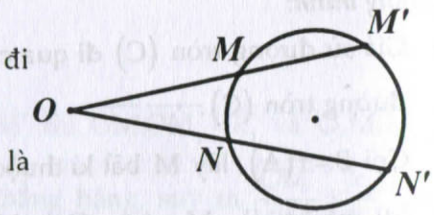
Từ định nghĩa ta thấy ảnh của mọi điểm M thuộc đường thẳng d đi qua cực O là một điểm M' thuộc d vì vậy $f(d) = d$ và ta nói d là đường thẳng kép của f.

Nếu hai đường tròn (C) và (C') có chung điểm A thì góc giữa hai tiếp tuyến của (C) và (C') cắt nhau tại A, B. Gọi d, d' lần lượt là tiếp tuyến của (C) và (C') tại A. Góc giữa hai đường thẳng d và d' được gọi là góc giữa (C) và (C'). Nếu góc giữa hai tiếp tuyến d và d' bằng 90^0 thì ta nói (C) và (C') là hai đường tròn trực giao.

Tính chất 3.

- Nếu $f(M) = M'$ thì mọi đường tròn đi qua M và M' đều là đường tròn bất biến, nghĩa là $f(C) = C$.
- Nếu $P_{O/(C)} = k$ thì (C) bất biến qua f.
- Nếu đường tròn (C) trực giao với đường tròn $(O, \sqrt{k})$ thì (C) bất biến qua f.

Chứng minh:

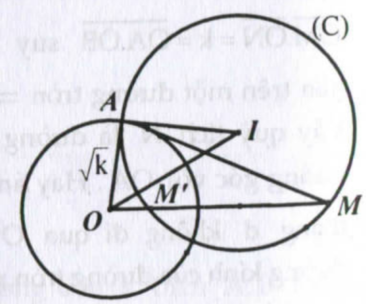


- Giả sử $f(M) = M'$ và (C) là đường tròn đi qua M, M'.

  Lấy điểm N bất kì thuộc (C), gọi N' là giao điểm của ON với (C).

  Ta có $\overline{ON}.\overline{ON'} = \overline{OM}.\overline{OM'} = k \Rightarrow f(N) = N'$

  $\Rightarrow (C)$ bất biến.



- $P_{O/(C)} = k$. Lấy M bất kì thuộc (C), gọi

  $M' = f(M) \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = k = P_{O/(C)} \Leftrightarrow M' \in (C)$

  $\Rightarrow (C)$ bất biến.

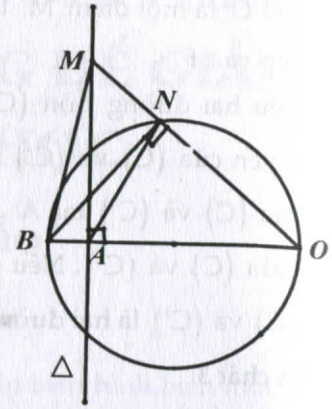
- Vì (C) và $(O; \sqrt{k})$ trực giao nên $P_{O/(C)} = (\sqrt{k})^2 = k$ do đó (C) bất biến.

Tính chất 4.

- Ảnh của một đường thẳng đi qua cực biến thành chính nó.
- Ảnh của một đường thẳng không đi qua cực biến thành đường tròn đi qua cực.

Chứng minh: Ý thứ nhất thì hiển nhiên, đã được chúng ta nhắc tới trong phần mọi đường thẳng qua cực đều là đường thẳng kép. Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của ý thứ hai.

Gọi A là hình chiếu của O trên Δ, gọi $B = f(A)$.



Lấy điểm $M \in \Delta$, giả sử $N = f(M)$ thì ta có $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OM}.\overline{ON} = k \Rightarrow A, B, M, N$ cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BAM} = 90^0$ hay N thuộc đường tròn đường kính OB. Khi M chạy trên Δ thì N chạy trên đường tròn đường kính OB. Vậy ảnh của Δ là đường tròn đường kính OB.

(hình vẽ bên ứng với trường hợp $k > 0$)

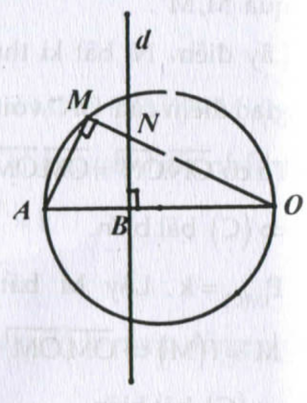
Tính chất 5.

- Ảnh của một đường tròn qua cực là một đường thẳng không qua cực và vuông góc với đường kính xuất phát từ cực của đường tròn đó.
- Ảnh của một đường tròn không qua cực là một đường tròn.

Chứng minh:

- Giả sử đường tròn (C) đi qua cực và A là điểm đối xứng của O qua tâm đường tròn (C).

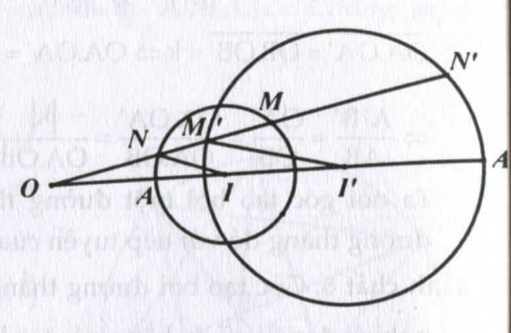
Gọi $B = f(A)$, lấy M bất kì thuộc (C) (dĩ nhiên là $M \neq A$). Gọi $N = f(M)$ khi đó $\overline{OM}.\overline{ON} = k = \overline{OA}.\overline{OB}$ suy ra A, B, M, N cùng nằn trên một đường tròn $\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{AMO} = 90^0$. Vậy quỹ tích N là đường thẳng đi qua B và vuông góc với OA. Hay ảnh của (C) là đường thẳng d không đi qua O và vuông góc với đường kính của đường tròn xuất phát từ cực O.



Gọi (I) là đường tròn không đi qua cực O, M là điểm bất kì của (I). Gọi $N = OM \cap (I)$. Đặt $p = \overline{OM}.\overline{ON}$ thì $p = P_{O/(I)}$ khi đó (I) bất biến qua f_I^p. Gọi $M' = f_O^k$ thì $\overline{OM}.\overline{OM'} = k \Rightarrow \dfrac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \dfrac{k}{p}$.

$\Rightarrow \overline{OM'} = \dfrac{k}{p}\overline{ON}$. Vậy M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, ti số $\dfrac{k}{p}$.

Đảo lại nếu M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, ti số $\dfrac{k}{p}$ thì



$\overline{OM'} = \dfrac{k}{p}\overline{ON} \Rightarrow \overline{OM'} = \dfrac{k}{p}\overline{ON}$

$\Rightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = \dfrac{k}{p}\overline{ON}.\overline{OM} = k$

$\Rightarrow M'$ là ảnh của M qua phép nghịch đảo f_O^k.

Vậy ảnh của (I) qua phép nghịch đảo là đường tròn (I') -ảnh của (I) trong phép vị tự tâm O ti số $\dfrac{k}{p} = \dfrac{k}{P_{O/(I)}}$.

Lưu ý: $f_O^k(I) \neq I'$

Tính chất 6.

Tích của hai phép nghịch đảo cùng cực $f_O^{k_1}$ và $f_O^{k_2}$ là một phép vị tự tâm O ti số $\dfrac{k_2}{k_1}$.

Chứng minh: Giả sử $f_O^{k_1} : M \to M_1, f_O^{k_2} : M_1 \to M'$ thì $\overline{OM}.\overline{OM_1} = k_1$ và O, M, M_1 thẳng hàng ; $\overline{OM_1}.\overline{OM'} = k_2$ O, M_1, M' thẳng hàng, suy ra $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \dfrac{k_2}{k_1}$ và O, M, M' thẳng hàng, do đó $V_{\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)} : M \to M'$.

Vậy $f_O^{k_2} \circ f_O^{k_1} = V_{\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)}$.

Hệ quả: $V_{(O;k_2)} \circ f_O^{k_1} = f_O^{k_1.k_2}$ (Vì $f_O^{k_2} = V_{\left(O;\frac{k_2}{k_1}\right)} \circ f_O^{k_1}$).

Tính chất 7. Nếu phép nghịch đảo cực O, phương tích k biến A, B thành A', B' tương ứng thì $A'B' = \dfrac{|k|}{OA.OB}.AB$.

Chứng minh:

- Nếu A, B với cực O thẳng hàng thì A', B' nằm trên trục OAB và $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = k \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'}$

$$= \frac{k}{OB} - \frac{k}{OA} = \frac{k}{OA.OB}\left(\overline{OA} - \overline{OB}\right) = \frac{k}{OA.OB}.\left(-\overline{AB}\right) \Rightarrow A'B' = \frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$

- Nếu A,B,O không thẳng hàng thì từ:

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = k \Rightarrow OA.OA' = OB.OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OB'A'$$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.OA'}{OA.OB} = \frac{|k|}{OA.OB} \Rightarrow A'B' = \frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$

Ta nói góc tạo bởi một đường thẳng và một đường tròn là góc tạo bởi đường thẳng đó với tiếp tuyến của đường tròn tại điểm chung của chúng.

Tính chất 8. Góc tạo bởi đường thẳng d và đường tròn (C) cùng đi qua cực nghịch đảo có số đo bằng góc tạo bởi ảnh của chúng trong phép nghịch đảo đó.(Bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH TOÁN

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Định lí Ptolé mee) Cho tứ giác ABCD. Chứng minh ABCD nội tiếp khi và chỉ khi $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

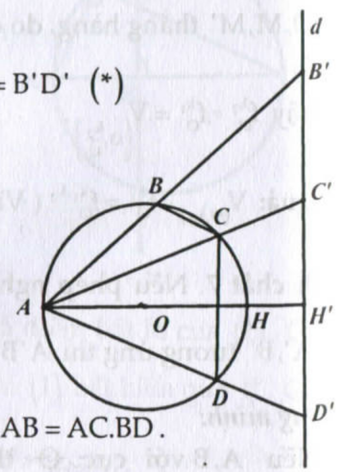
Lời giải

Xét phép nghịch đảo tâm A, phương tích $k \neq 0$ bất kì.

Gọi B', C', D' lần lượt là ảnh của A,B,C qua f_O^k.

Vậy A,B,C,D nằm trên đường tròn $(O) \Leftrightarrow$ B', C', D' nằm đường thẳng d (ảnh của (O) qua f_O^k).

Vậy ABCD nội tiếp khi và chỉ khi $B'C' + C'D' = B'D'$ (*)



Mà $B'C' = \frac{|k|}{AB.AC}.BC, C'D' = \frac{|k|}{AC.AD}.CD,$

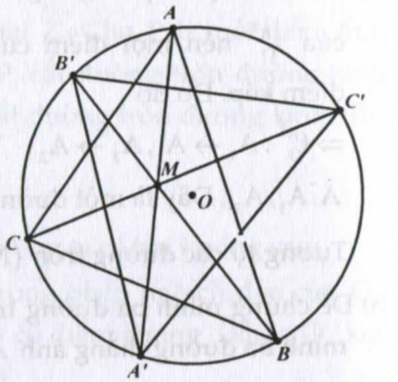
$B'D' = \frac{|k|}{AB.AD}.BD$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \frac{|k|}{AB.AC}.BC + \frac{|k|}{AC.AD}.CD = \frac{|k|}{AB.AD}.BD$

$\Leftrightarrow \frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD} = \frac{BD}{AB.AD} \Leftrightarrow BC.AD + CD.AB = AC.BD.$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Giả sử M là một điểm nằm trong đường tròn (O), các đường thẳng MA,MB,MC lần lượt cắt (O) tại các điểm A', B', C'. Chứng minh $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.

Lời giải



Xét phép nghịch đảo cực M, phương tích $k = P_{M/(O)}$.

Do $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC'} = k$ (1)

nên $f_O^k : A \to A', B \to B', C \to C'$, vì vậy

$A'B' = \frac{|k|}{MA.MB}.AB$, $B'C' = \frac{|k|}{MB.MC}.BC$,

$A'C' = \frac{|k|}{MA.MC}.AC(2)$.

Mặt khác theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}, S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} \quad (3).$$

Từ (1),(2),(3) ta có $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{|k|^3}{(MA.MB.MC)^2} = \frac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.(đpcm)

Bài toán 02: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH THẲNG HÀNG VÀ ĐỒNG QUY.

CÁC VÍ DỤ

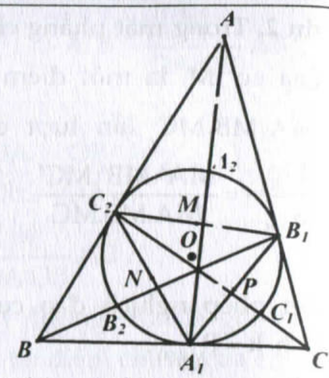
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 là các giao điểm thứ hai của AA_1, BB_1, CC_1 với (O), M,N,P lần lượt là trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh:

a) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $MA_1A_2, NB_1B_2, PC_1C_2$ đi qua O.

b) Ba đường tròn trên có điểm chung thứ hai.

Lời giải

a) Để chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $MA_1A_2, NB_1B_2, PC_1C_2$ đi qua O. Ta chỉ ra có phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó biến các đường tròn này thành đường thẳng.



Xét phép nghịch đảo $f_O^{R^2}$.

Dễ thấy A, M, O thẳng hàng, tam giác AB_1O vuông tại B_1 có đường cao B_1M nên $\overline{OM}.\overline{OA} = OB_1^2 = R^2 \Rightarrow f_O^{R^2} : M \to A$.

Mặt khác $(O;R)$ là đường tròn nghịch đảo của $f_O^{R^2}$ nên mọi điểm của (O) đều là điểm kép. Do đó

$\Rightarrow f_O^{R^2} : A_1 \to A_1, A_2 \to A_2$. Vậy đường tròn (MA_1A_2) có ảnh đi qua A, A_1, A_2. Đây là một đường thẳng nên (MA_1A_2) phải đi qua cực O.

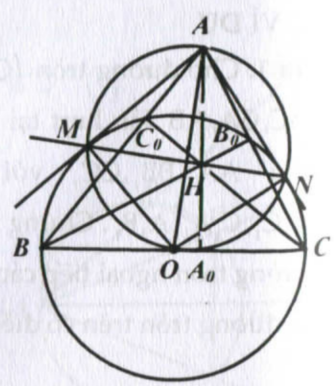
Tương tự các đường tròn $(NBB_1), (PCC_1)$ cũng đi qua O.

b) Để chứng minh ba đường tròn trên có chung điểm thứ hai ta chỉ cần chứng minh ba đường thẳng ảnh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Dễ thấy $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$ nên theo định lí Cesva thì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm I, khi đó ba đường tròn trên cùng đi qua điểm I' là ảnh của I qua phép nghịch đảo $f_O^{R^2}$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi B_0, C_0 là các giao điểm của AC, AB với (O). Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ A đến (O). Chứng minh H, M, N thẳng hàng.

Lời giải



Để chứng minh các điểm H, M, N thẳng hàng ta chứng minh nó là ảnh của ba điểm nằm trên một đường tròn đi qua cực trong một phép nghịch đảo nào đó.

Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $k = AM^2 = AN^2$.

Ta có $f_A^{AM^2} : M \to M, N \to N$ nên:

$f_A^{AM^2} : (AMN) \to MN$. Gọi A_0 là ảnh của H trong phép nghịch đảo này.

Để chứng minh H, M, N thẳng hàng ta cần chứng minh $A_0 \in (AMN)$.

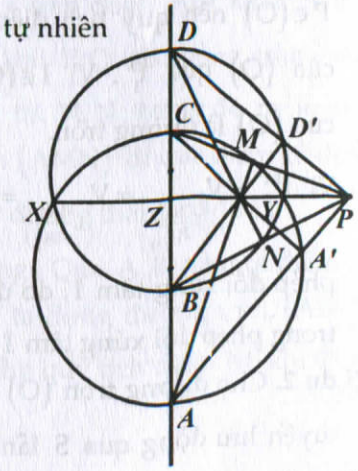
Mà $\overline{AH}.\overline{AA_0} = AN^2 = \overline{AB_0}.\overline{AC}$ nên tứ giác A_0CB_0H nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HA_0C} = \widehat{CB_0H} = 90^0$, do đó điểm A_0 nhìn đoạn OA dưới một góc vuông suy ra $A_0 \in (AMN)$ vì vậy $f_A^{AM^2}(A_0) = H \in MN$, hay H, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC, BD cắt nhau tại các điểm X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng AB khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại N. Chứng minh AM, DN, XY đồng quy.

Lời giải

Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy thường ta có hai hướng sau:

- Chứng minh nó là ảnh của ba đường tròn trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó mà ba đường tròn đó có điểm chung I khác O, khi đó ba đường thẳng này đồng quy tại $I' = f_O^k(I)$.
- Chứng minh hai đường thẳng là ảnh của hai đường tròn cắt nhau trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó và đường còn lại đi qua cực O, đồng thời là trục đẳng phương của hai đường tròn đó, khi đó ba đường thẳng sẽ đồng quy tại điểm I' (I' là ảnh của giao điểm (khác cực) của hai đường tròn)



Dựa vào sự phân tích này ta có lời giải sau khá tự nhiên

Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD và $A' = PA \cap (C_1), D' = PD \cap (C_2)$. Do P nằm trên XY (trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)) nên $P_{P/(C_1)} = P_{P/(C_2)}$

$\Rightarrow \overline{PB}.\overline{PN} = \overline{PC}.\overline{PM} = k$. Xét phép nghịch đảo cực P, phương tích k. Ta có $f_P^k : M \mapsto C, A \mapsto A' \Rightarrow (PA'C) \mapsto AM$.

Tương tự $f_P^k : N \mapsto B, D \mapsto D' \Rightarrow (PBD') \mapsto NB$. Do $f_P^k : XY \mapsto XY$ nên để chứng minh AM, DN, XY đồng quy ta sẽ chứng minh XY là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD').

Do $\widehat{PZC} = \widehat{PA'C} = 90^0 \Rightarrow Z \in (PA''C)$. Tương tự $Z \in (PBD')$ suy ra PZ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD').

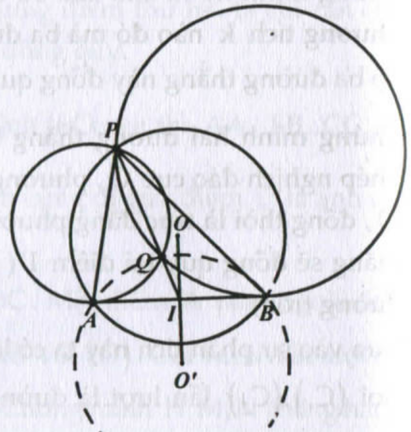
Vậy AM, DN, XY đồng quy.

Bài toán 03: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, P là một điểm thay đổi trên (O). Gọi (C) và (C') là hai đường tròn qua P lần lượt tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

Lời giải

Gọi Q là giao điểm thứ hai của (C) và (C'), và I là giao điểm của PQ với AB, khi đó ta có $\overline{IQ}.\overline{IP} = IA^2 = P_{I/(C)}$



$\overline{IQ}.\overline{IP} = IB^2 = P_{I/(C')}$

$\Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB.

Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích $k = IA^2$ ta có $f_I^k : Q \mapsto P$, mà $P \in (O)$ nên quỹ tích điểm Q là ảnh của (O) qua f_I^k. Vì $I \notin (O)$ nên ảnh của (O) là đường tròn.

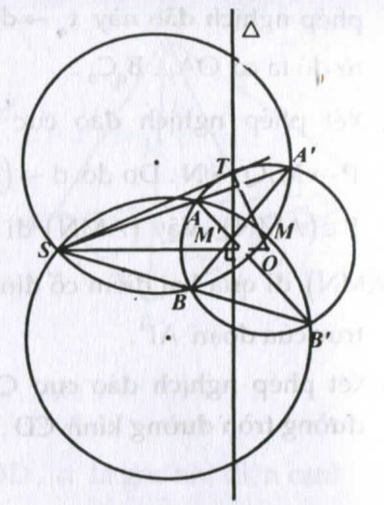
Vì $f_I^{IA^2} = V_{\left(I, \frac{IA^2}{P_{I/(O)}}\right)} = V_{\left(I, \frac{IA^2}{-IA^2}\right)} = V_{(I,-1)}$, do phép vị tự tâm I, tỉ số -1 chính là phép đối xứng tâm I, do đó ảnh của (O) là đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và điểm S nằm ngoài đường tròn (O). Hai cát tuyến lưu động qua S lần lượt cắt (O) tại A, A' và B, B'. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB' và SBA'. Tìm quỹ tích điểm M.

Lời giải

Xét phép nghịch đảo cực S, phương tích $k = P_{S/(O)}$, khi đó ta có:

$f_S^k : (O) \mapsto (O)$ (theo tính chất 3b).



Lại có $\overline{SA}.\overline{SA'} = P_{S/(O)} = \overline{SB}.\overline{SB'}$ nên $A \to A', B \mapsto B'$ do đó $(SAB') \mapsto A'B$ và $(SBA') \mapsto B'A$. Do đó giao điểm M của hai đường tròn (SAB') và $(SA'B)$ biến thành điểm $M' = AB' \cap A'B$.

Vẽ tiếp tuyến ST của (O), gọi H là giao điểm của SO với đường thẳng Δ đi qua T vuông góc với SO ta có $M' \in \Delta$.

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính SO (đường tròn nghịch đảo), đây là ảnh của Δ qua phép nghịch đảo trên.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của B, C trên Ac, AB. Chứng minh tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A song song với B_0C_0, từ đó suy ra $OA \perp B_0C_0$.

2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm I trên đoạn AB(khác A, B). Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt (O) tại P, Q (d không trùng với AB). Đường thẳng AP, AQ cắt tiếp tuyến m tại M, N; trong đó m là tiếp tuyến của (O) tại B. Chứng minh đường tròn (AMN) đi qua điểm cố định thứ hai, suy ra tâm của (AMN) nằm trên một đường thẳng cố định.

3. Cho ba điểm A, B, C nằm trên một đường thẳng. Qua A, B và một điểm E biến thiên của đường trung trực Δ của AB ta dựng đường tròn (ABE). Đường thẳng CE cắt đường tròn đó tại M. Tìm quỹ tích điểm M khi E di động trên Δ.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1.Ta thấy B, C_0, B_0, C cùng nằm trên một đường tròn. Do đó $\overline{AB}.\overline{AC_0} = \overline{AC}.\overline{AB_0} = k$. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích k ta được $B_0 \to C, C_0 \to B \Rightarrow B_0C \to (O)$. Gọi t_a là tiếp tuyến tại A của (O) thì trong

phép nghịch đảo này $t_a \to d$. Mặt khác t_a tiếp xúc với (O) nên $t_a \parallel B_0C_0$ từ đó ta có $OA \perp B_0C_0$.

2. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích AB^2 thì $(O) \to m$ do đó $P \to M, Q \to N$. Do đó $d \to (AMN)$. Mặt khác $I \to I'$ cố định, mà $I \in d$ nên $I' \in (AMN)$. Vậy (AMN) đi qua điểm I cố định.

(AMN) đi qua hai điểm cố định A, I' nên tâm của nó nằm trên đường trung trực của đoạn AI'.

3. Xét phép nghịch đảo cực C phương tích $k = \overline{CA}.\overline{CB}$, ta được M thuộc đường tròn đường kính CD.

Tứ diện

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Công thức tính đường trọng tuyến.

Đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện được gọi là đường trọng tuyến của tứ diện.

Cho tứ diện ABCD có $DA = a, DB = b, DC = c$, $BC = a_1, CA = b_1, AB = c_1$.

Gọi m_d là đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh D.

Ta có $m_d^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - \dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}$.

Chứng minh:

Gọi D_0 là trọng tâm tam giác ABC và N là trung điểm của BC.

Đặt $DN = p, AN = q$, $\widehat{DD_0N} = \phi$.

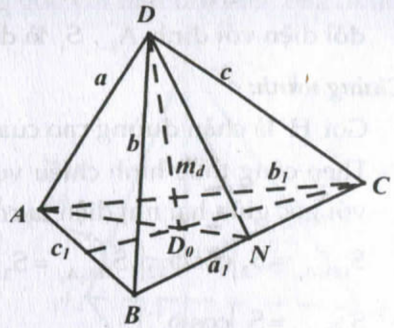
Ta có $DN^2 = D_0D^2 + D_0N^2 - 2D_0D.D_0N\cos\widehat{ND_0D}$

$\Rightarrow p^2 = m_d^2 + \dfrac{q^2}{9} - 2m_d\dfrac{q}{3}\cos\phi$ (1)

Tương tự $AD^2 = D_0D^2 + D_0A^2 - 2D_0D.D_0A\cos\widehat{AD_0D}$

$\Rightarrow a^2 = m_d^2 + \dfrac{4}{9}q^2 + 2.\dfrac{2q}{3}m_d\cos\phi$ (2)

Từ (1) và (2) ta có



$\Rightarrow 2p^2 + a^2 = 2(m_d^2 + \dfrac{q^2}{9} - 2m_d\dfrac{q}{3}\cos\phi) + m_d^2$

$+\dfrac{4}{9}q^2 + \dfrac{4q}{3}m_d\cos\phi \Rightarrow 3m_d^2 = a^2 + 2p^2 - \dfrac{2q^2}{3}$.

Mặt khác $p^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a_1^2}{4}$ và $q^2 = \dfrac{b_1^2+c_1^2}{2} - \dfrac{a_1^2}{4}$

nên $m_d^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - \dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}$ (đpcm).

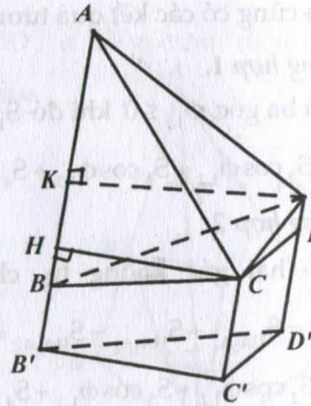
2. Một số công thức về diện tích.

Định lí 1.

Gọi S_1, S_2 là diện tích các mặt ABC và ABD, α là góc nhị diện cạnh AB, ϕ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Giả sử $AB = a, CD = b$.

Ta có $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\phi)^2}{4}$

Chứng minh:



Xét mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh AB tại B'. Gọi H,K là chân đường cao các tam giác CAB và DAB.

Chiếu tứ diện lên (P) theo phương AB ta được $A,B,H,K \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, $D \mapsto D'$, nên tứ diện ABCD có hình chiếu là tam giác B'C'D'.

Ta có $B'C' = HC = \dfrac{2S_1}{a}$; $B'D' = DK = \dfrac{2S_2}{a}$

và $C'D' = DE = CD\sin\phi = b\sin\phi$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác B'C'D' ta có

$C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C'.B'D'\cos C'B'D'$.

$\Leftrightarrow \dfrac{4S_1^2}{a^2} + \dfrac{4S_2^2}{a^2} - 2\dfrac{2S_1}{a}\dfrac{2S_2}{a}\cos\alpha = (b\sin\phi)^2 \Leftrightarrow S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\phi)^2}{4}$

Định lí 2. Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ta có :

- $S_1 = S_2\cos\phi_{1,2} + S_3\cos\phi_{1,3} + S_4\cos\phi_{1,4}$ (1).
- $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\phi_{2,3} - 2S_2S_4\cos\phi_{3,4} - 2S_3S_4\cos\phi_{3,4}$ (2).

Trong đó $\phi_{i,j}$ là góc nhị diện tạo bởi mặt đối diện với đỉnh A_i và các mặt đối diện với đỉnh A_j, S_i là diện tích của mặt đối diện với đỉnh A_i.

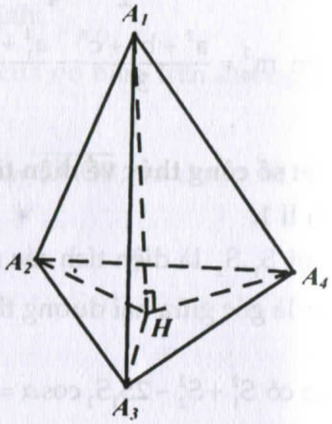
Chứng minh:

- Gọi H là chân đường cao của tứ diện ABCD.

Theo công thức hình chiếu với chú ý góc giữa hai mặt phẳng bằng hoặc bù với góc giữa hai nhị diện ta có

$S_{HA_3A_4} = S_2\left|\cos\phi_{1,2}\right|, S_{HA_2A_4} = S_3\left|\cos\phi_{1,3}\right|$

$S_{HA_2A_3} = S_4\left|\cos\phi_{1,4}\right|$.



Nếu $\phi_{1,2} < 90^0$ thì H và A_2 nằm cùng phía đối với A_3A_4 và khi đó $S_{HA_3A_4} = S_2\cos\phi_{1,2}$.

Nếu $\phi_{1,2} = 90^0 \Rightarrow H \in A_3A_4 \Rightarrow S_{HA_3A_4} = 0$.

Nếu $\phi_{1,2} > 90^0$ thì H và A_2 nằm khác phía đối với A_3A_4 và khi đó $S_{HA_3A_4} = -S_2\cos\phi_{1,2}$.

Ta cũng có các kết quả tương tự đối với các tam giác HA_2A_3 và HA_2A_4.

Trường hợp 1.

Cả ba góc $\phi_{1,j} \le 0$ khi đó $S_1 = S_{HA_2A_3} + S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4}$

$= S_2\cos\phi_{1,2} + S_3\cos\phi_{1,3} + S_4\cos\phi_{1,4}$.

Trường hợp 2.

Có hai góc không tù, chẳng hạn $\phi_{1,2} \le 90^0, \phi_{1,3} \le 90^0, \phi_{1,4} > 90^0$ khi đó

$S_1 = S_{HA_2A_4} + S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_3} = S_3\phi_{1,3} + S_2\phi_{1,2} - \left(-S_4\phi_{1,4}\right)$

$= S_2\cos\phi_{1,2} + S_3\cos\phi_{1,3} + S_4\cos\phi_{1,4}$.

Trường hợp 3.

Có một góc không tù, chẳng hạn $\phi_{1,2} \le 90^0$ khi đó

$S_1 = S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_4} - S_{HA_2A_3} = S_2\phi_{1,2} - (-S_3\phi_{1,3}) - \left(-S_4\phi_{1,4}\right)$

$= S_2\cos\phi_{1,2} + S_3\cos\phi_{1,3} + S_4\cos\phi_{1,4}$.

Rõ ràng không thể có trường hợp cả ba góc không nhọn do đó ta có (đpcm)

Lưu ý: Có thể chứng minh công thức (1) bằng cách sử dụng phương pháp vec tơ và định lí con nhím như sau.

Gọi $e_i\left(i=1,2,3,4\right)$ là các vec tơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện của đỉnh A_i thì ta có $S_1\vec{e_1} + S_2\vec{e_2} + S_3\vec{e_3} + S_4\vec{e_4} = \vec{0}$

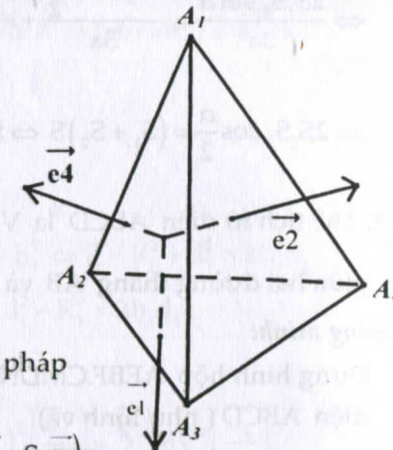
$\Leftrightarrow S_1\vec{e_1} = -\left(S_2\vec{e_2} + S_3\vec{e_3} + S_4\vec{e_4}\right)$.

Nhân vô hướng hai vế với $\vec{e_1}$ và lưu ý

$\left(\vec{e_1}, \vec{e_j}\right) + \phi_{1,j} = 180^0 \Rightarrow \cos\left(\vec{e_1};\vec{e_j}\right) = -\cos\phi_{1,j}$

(j=2,3,4) ta được:

$S_1 = S_2\cos\phi_{1,2} + S_3\cos\phi_{1,3} + S_4\cos\phi_{1,4}$.



- Ta chứng minh công thức (2) bằng phương pháp vec tơ, ta có

$S_1\vec{e_1} + S_2\vec{e_2} + S_3\vec{e_3} + S_4\vec{e_4} = \vec{0} \Leftrightarrow S_1\vec{e_1} = -\left(S_2\vec{e_2} + S_3\vec{e_3} + S_4\vec{e_4}\right)$

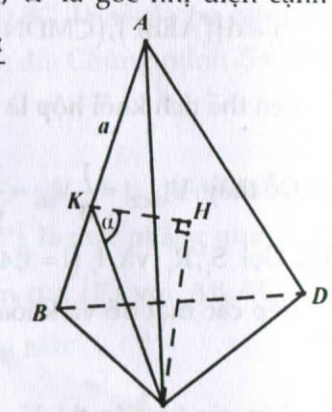
Bình phương vô hướng kết hợp với $\Rightarrow \cos\left(\vec{e_i};\vec{e_j}\right) = -\cos\phi_{i,j}(i \ne j, i, j = 2,3,4)$ ta có điều phải chứng minh.

3. Một số công thức về thể tích của tứ diện.

3. 1. Gọi S_1, S_2 là diện tích các mặt ABC và ABD, α là góc nhị diện cạnh AB = a. Thể tích tứ diện ABCD là $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$

Chứng minh:

Gọi H là chân đường cao hạ từ C của tứ diện, kẻ $HK \perp AB$ thì $CHK = \alpha$.



Ta có $V = \dfrac{1}{3}CH.S_2$, mà $CH = CK\sin\alpha = \dfrac{2S_1\sin\alpha}{a}$.

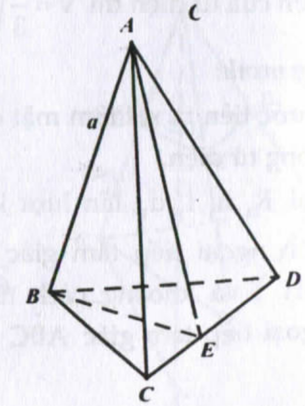
Suy ra $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

Hệ quả: Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh AB cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích $S = \dfrac{2S_1S_2}{S_1+S_2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Chứng minh:

Gọi E là giao điểm của mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh AB, ta có

$V_{ABCD} = V_{ABEC} + V_{ABED}$



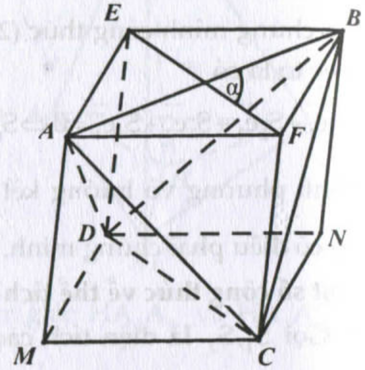
$$\Leftrightarrow \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}=\frac{2S_1S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}+\frac{2S_2S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}$$

$$\Leftrightarrow 2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}=\left(S_1+S_2\right)S \Leftrightarrow S=\frac{2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}}{S_1+S_2}\text{ (đpcm).}$$

3.2. Thể tích tứ diện ABCD là $V=\frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\phi$, trong đó d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD, ϕ là góc giữa chúng.

Chứng minh:

Dựng hình hộp AEBF.CMDN ngoại tiếp tứ diện ABCD (như hình vẽ).



Ta có EF // CD nên $\left(\widehat{AB,EF}\right)=\left(\widehat{AB,CD}\right)=\alpha$.

Vì AEBF là hình bình hành nên

$$S_{AEBF}=\frac{1}{2}AB.EF\sin\alpha=\frac{1}{2}AD.CD\sin\alpha$$

Do đường cao của hình hộp là:

$$h=d\left(\left(AEBF\right),\left(CMDN\right)\right)=d\left(AB,CD\right)=d$$

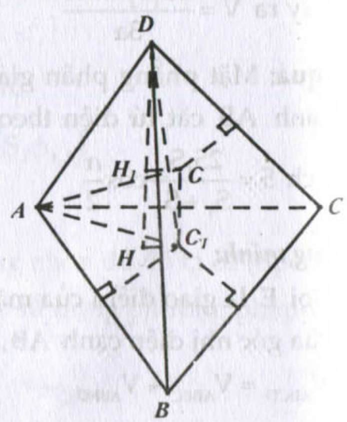
nên thể tích khối hộp là $V_{hh}=\frac{1}{2}AD.CD.d\sin\alpha$.

Dễ thấy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{hh}=\frac{1}{6}AB.AD.d\sin\alpha$ (đpcm).

3.3. Gọi S_i, R_i và l_i $\left(i=1,4\right)$ là diện tích các mặt, bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đó và khoảng cách từ tâm các đường tròn đó đến các đỉnh đối diện của tứ diện thì $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$

Chứng minh:

Trước tiên ta xét tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trong tứ diện.



Gọi R_1, h_1, l_1, d_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường cao DH , và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến d. Gọi O, O_1

lần lượt là tâm mặt cầu và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H_1 là hình chiếu của O trên DH. Đặt $OO_1=d_1$ và R là bán kính mặt cầu.

Ta có $O_1H^2=O_1D^2-DH^2=l_1^2-h_1^2$

$$OH_1^2=OD^2-DH_1^2=R^2-\left(h_1-d_1\right)^2$$

$R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2$.

Vì $O_1H=OH_1$ nên $R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2=l_1^2-h_1^2\Leftrightarrow l_1^2-R^2+d_1^2=2h_1d_1$.

Lại có $R^2-d_1^2=OA^2-OO_1^2=AO_1^2=R_1^2$ nên $l_1^2-R_1^2=2h_1d_1$.

Tương tự $l_i^2-R_i^2=2h_id_i\left(i=2,3,4\right)$.

Do đó $\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)=\sum_{i=1}^{4}2S_i^2h_id_i=\sum_{i=1}^{4}2\left(S_ih_i\right)^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)=\sum_{i=1}^{4}18V^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)$

Mà $\sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i}=1$ nên $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$.

Cho tứ diện ABCD có thể tích V và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện bằng R. Chứng minh rằng AB.CD; AC.DB; AD.BC là số đo ba cạnh của một tam giác nào đó. Gọi S là diện tích tam giác đó. Chứng minh S = 6VR (công thức Crelle)

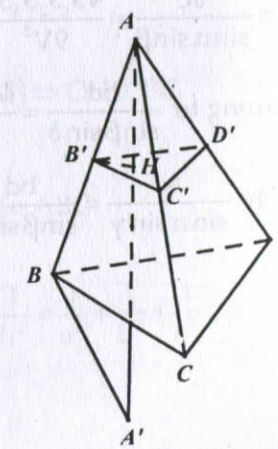
Chứng minh:

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và A' là điểm đối xứng của A qua O. H là trung điểm của AO. Gọi (P) là mặt phẳng qua H và vuông góc với AO, B',C',D' lần lượt là giao điểm của (P) với AB,AC,AD.

Ta có các tam giác vuông AHB',ABA' đồng dạng nên:

$$\frac{AB'}{AH}=\frac{AA'}{AB}\Rightarrow AB.AB'=AH.AA'=\frac{1}{2}R.2R=R^2$$

$\Rightarrow AB.AB'=R^2$.



Tương tự ta có : AC.AC' = AD.AD' = R^2

$\Rightarrow$ AB.AB' = AC.AC' = AD.AD'

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\Rightarrow B'C'=\frac{BC.AC'}{AB}=\frac{BC.AC'.AC.AD}{AB.AC.AD}=\frac{AD.BC.R^2}{AB.AC.AD}$$

$$\Rightarrow \frac{B'C'}{AD.BC}=\frac{R^2}{AB.AC.AD}.$$

Tương tự ta có: $\frac{B'C'}{AD.BC}=\frac{C'D'}{AB.CD}=\frac{D'B'}{AC.DB}=\frac{R^2}{AB.AC.AD}$

Vậy là 3 cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

Ta có $\frac{S}{S_{AB'C'D'}}=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2$

$$\Rightarrow S=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 S_{AB'C'C'}=\left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2.\frac{3V_{A.B'C'D'}}{AH}$$

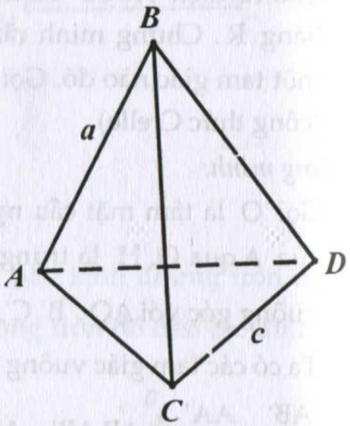
$$=6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5}.\frac{V_{A.B'C'D'}}{V_{A.BCD}}.V_{ABCD}=6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5}\frac{AB'AC'AD'}{AB.AC.AD}.V$$

$$=6\frac{(AB.AB')(AC.AC')(AD.AD')}{R^5}V=6\frac{R^6}{R^5}V=6VR.$$

4. Định lí sin trong tứ diện

Cho tứ diện $ABCD$, có $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=e, BD=f$. Gọi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\phi,\lambda$ lần lượt là góc nhị diện các cạnh AB,BC,CD,DA,AC,BD thì

$$\frac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\frac{ef}{\sin\phi\sin\lambda}$$



Chứng minh:

Đặt $S_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A,B,C,D.

Ta có $V=\frac{2S_3S_4\sin\alpha}{3a}$ và $V=\frac{2S_1S_2\sin\gamma}{3c}$

$$\Rightarrow \frac{4S_1S_2S_3S_4\sin\alpha\sin\gamma}{9ac}=V^2$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}.$$

Tương tự $\frac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$, $\frac{ef}{\sin\phi\sin\lambda}=\frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$.

Vậy $\frac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\frac{ef}{\sin\phi\sin\lambda}$.

Tứ diện vuông

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc được gọi là tứ diện vuông. Sau đây là một số tính chất và công thức liên quan đến tứ diện vuông mà có nhiều hệ thức tương tự như công thức lượng trong tam giác vuông.

2. Tính chất.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA=a, OB=b, OC=c$, đường cao $OH=h$.

Ta có:

1. H là trực tâm tam giác ABC
2. $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$
3. $S^2_{\Delta ABC}=S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}$ (định lí Pitago)
4. $S^2_{\Delta OAB}=S_{\Delta ABC}.S_{\Delta HAB}$ (Công thức hình chiếu)
5. Gọi α,β,γ là góc giữa OH với OA,OB,OC thì $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
6. Gọi A,B,C là ba góc của tam giác ABC thì $a^2\tan A=b^2\tan B=c^2\tan C$
7. Độ dài đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau.
8. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$
9. $V=\frac{1}{6}abc$, $S_{tp}=\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$
10. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Chứng minh:

- Ta có $OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp BC$, lại có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp BC$

  $\Rightarrow BC\perp(OAH)\Rightarrow BC\perp AH$.

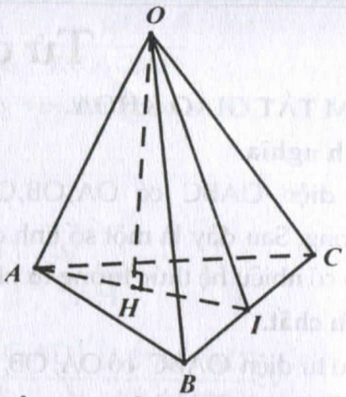
  Tương tự $AB\perp CH$, do đó H là trực tâm tam giác ABC.
- Gọi I là giao điểm của AH và BC.

  Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.
- $S^2{}_{ABC}=\frac{1}{4}AI^2BC^2=\frac{1}{4}\left(OA^2+OI^2\right)BC^2$

$$=\frac{1}{4}OA^2BC^2+\frac{1}{4}OI^2BC^2$$

$$=\frac{1}{4}OA^2\left(OB^2+OC^2\right)+\frac{1}{4}OI^2BC^2$$

$$=S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}.$$



- $S^2_{OAB}=\frac{1}{4}OA^2OB^2=\frac{1}{4}(AH.AI)(BI.BC)$

$$=\left(\frac{1}{2}AI.BC\right)\left(\frac{1}{2}AH.BI\right)=S_{\Delta ABC}.S_{\Delta HAB}$$

- Từ $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ suy ra $\left(\frac{OH}{OA}\right)^2+\left(\frac{OH}{OB}\right)^2+\left(\frac{OH}{OC}\right)^2=1$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

- Áp dụng định lí cô tang (định lí cô sin mở rộng) ta có

$$\cot A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{4S_{ABC}}=\frac{a^2+b^2+a^2+c^2-\left(b^2+c^2\right)}{4S_{ABC}}=\frac{a^2}{2S_{ABC}}$$

$\Rightarrow a^2\tan A=2S_{ABC}$.

Tương tự ta có $b^2\tan B=c^2\tan C=2S_{ABC}$.

Vậy $a^2\tan A=b^2\tan B=c^2\tan C$.

- Sử dụng công thức tính đường trung tuyến và định lí Pitago ta có ngay $d=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

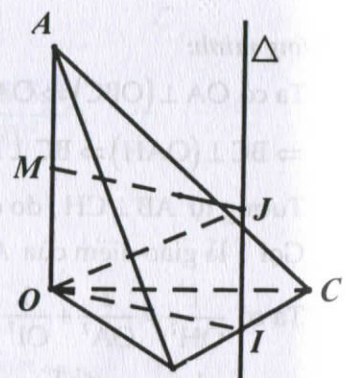
- Theo tính chất 3 ta có $S^2_{\Delta ABC}=S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}=\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}b^2c^2+\frac{1}{4}c^2a^2$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

- Hiển nhiên

- Từ trung điểm I của BC kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (OBC), gọi J là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của đoạn OA thì J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC và bán kính

$$R=\sqrt{OI^2+IJ^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện ABCD có AB,AC,AD đôi một vuông góc và $AB=AC+AD$. Tính $\widehat{ABC}+\widehat{DBC}+\widehat{CBD}$.

2. Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và A,B,C ba góc của tam giác ABC. Đặt $\alpha=\widehat{AOH},\beta=\widehat{BOH},\gamma=\widehat{COH}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A}=\frac{\sin^2\beta}{\sin 2B}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$.

3. Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc, $AC=2OB, BC=2OA$. Gọi D là trung điểm của AB, E và F là chân đường cao kẻ từ A của các tam giác OBC và OAC.

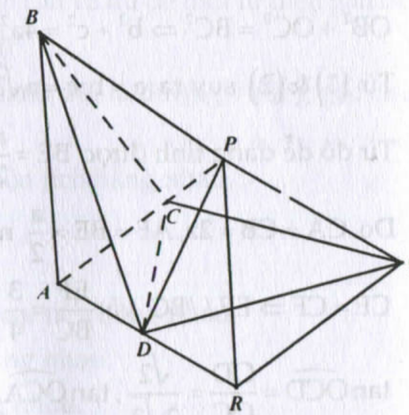
Chứng minh $\frac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}}+\frac{EF}{AB}=1$.

4. Cho tứ diện ABCD có AB,AC,AD đôi một vuông góc, gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đặt $\alpha=\widehat{DAH},\beta=\widehat{DBH},\gamma=\widehat{DCH},\phi=\widehat{AHB}$.

Chứng minh $\sin\phi=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$ và $\cos\phi=-\tan\alpha\tan\beta$.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Trên các tia AC,AD lấy các điểm P,R sao cho $AP=AR=AB$, dựng hình vuông APQR. Ta có $AC=DR$, $AB=QR$ nên $\Delta ABC=\Delta RQD$. Tương tự $\Delta ABD=\Delta PQC$, suy ra $\Delta BCD=\Delta QDC$.



Vậy tổng các góc phẳng tại đỉnh B là

$\widehat{PQC}+\widehat{CQD}+\widehat{DQR}=\widehat{PQR}=90^0$

Cách 2: Ta có $\alpha=\widehat{CBD},\beta=\widehat{ADB},\gamma=\widehat{ABC}$.

$$\cos\alpha=\frac{BC^2+DB^2-CD^2}{2BC.BD}=\frac{AB^2+AC^2+AD^2+AB^2-\left(AC^2+AD^2\right)}{2BC.BD}$$

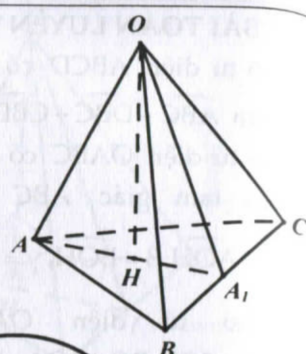
$$=\frac{AB^2}{BC.BD}=\frac{AB(AC+AD)}{BC.BD}=\frac{AB}{BD}.\frac{AC}{BC}+\frac{AB}{BC}.\frac{AD}{BD}$$

$=\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma=\sin(\beta+\gamma)\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=90^0$.

2. Gọi A_1 là giao điểm của AH và BC, ta có ΔAOA_1 vuông tại O và có OH là đường cao nên $\sin^2\alpha=\frac{AH^2}{OA^2}=\frac{AH^2}{AH.AA_1}=\frac{AH}{AA_1}$ (1)

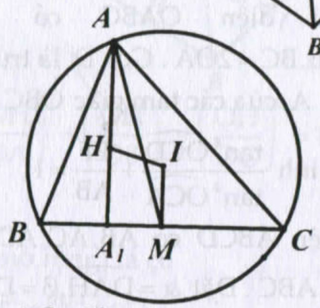
Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm của BC thì $2IM = AH$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BIM}$ do đó

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2BM.IM}{IB^2} = \frac{BC.AH}{2R^2} \quad (2)$$



Từ $(1)\&(2)$ suy ra

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{R^2}{\frac{1}{2}AA_1.BC} = \frac{R^2}{S}.$$



(S là diện tích tam giác ABC)

Tương tự ta có $\frac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S}$.

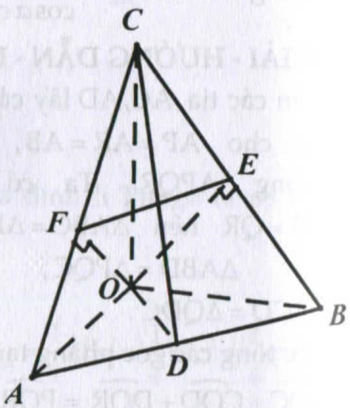
Vậy $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$.

3. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ thì $BC = 2a, AC = 2b$.

Ta có $OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 4b^2$ (1)

$OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 4a^2$ (2)

Từ $(1)\&(2)$ suy ra $a = b, c = a\sqrt{3}$.



Từ đó dễ dàng tính được $BE = \frac{a}{2}, AF = \frac{a}{2}$

Do $CA = CB = 2a, AF = BE = \frac{a}{2}$ nên:

$CE = CF \Rightarrow EF // BC$ và $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{4}$.

$\tan\widehat{OCD} = \frac{OD}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \tan\widehat{OCA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

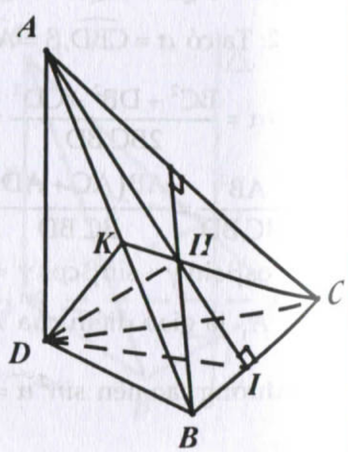
Từ đó ta có $\frac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \frac{EF}{AB} = 1$.

4. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $DH \perp (ABC)$.

Gọi $I = AH \cap BC$. Tam giác ADI vuông tại D có đường cao DH nên

$DH^2 = AH.HI = -AH.BH\cos\phi$

$\Rightarrow \cos\phi = -\frac{DH}{AH}.\frac{DH}{BH} = -\tan\alpha\tan\beta$



Gọi $K = CH \cap AB$ thì ta có $\widehat{DKC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Theo công thức hình chiếu ta có $S_{HAB} = S_{ABD}\cos\widehat{CKD}$ (1)

Ta có $\cos\widehat{DKC} = \sin\gamma$ nên từ (1) suy ra $\frac{1}{2}HA.HB\sin\phi = \frac{1}{2}DA.DB\sin\gamma$.

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{DA}{HA}.\frac{DB}{HB}.\sin\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Tứ diện gần đều

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa.

Tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau được gọi là tứ diện gần đều.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy tứ diện gần đều có bốn mặt là các tam giác bằng nhau.

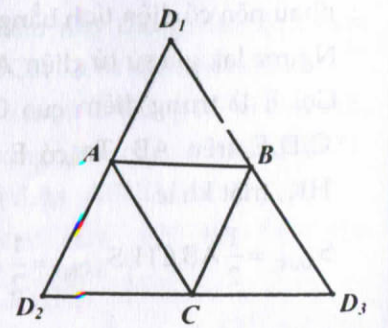
2. Một số điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện gần đều.

Mỗi điều kiện sau đây đều là một điều kiện cần và đủ để một tứ diện gần đều.

- Tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng 180^0
- Mỗi đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối là đường vuông góc chung của cặp cạnh tương ứng đó.
- Bốn mặt của tứ diện là các tam giác có diện tích bằng nhau.
- Tứ diện có hai trục đối xứng.
- Bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu ngoại tiếp bằng nhau.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tổng cô sin của các nhị diện chứa cùng một mặt bằng của tứ diện bằng 1
- Góc nhị diện của các cặp cạnh đối bằng nhau.

Chứng minh:

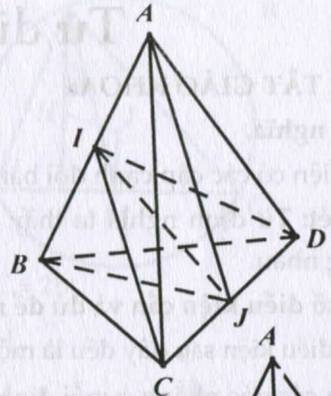
- Nếu ABCD là tứ diện gần đều thì dễ dàng chứng minh được tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng 180^0. Giả sử ngược lại, tứ tứ diện ABCD có tổng các góc ở mỗi đỉnh bằng 180^0, trải các mặt chứa D của tứ diện lên (ABC).



Giả sử các mặt DAB, DBC, DAC khi trải xuống (ABC) ta được các mặt $(D_1AB), (D_2BC), (D_3AC)$. Dễ thấy tổng các góc ở mỗi đỉnh bằng 180^0 nên các điểm A, B, C thuộc các cạnh của tam giác $D_1D_2D_3$.

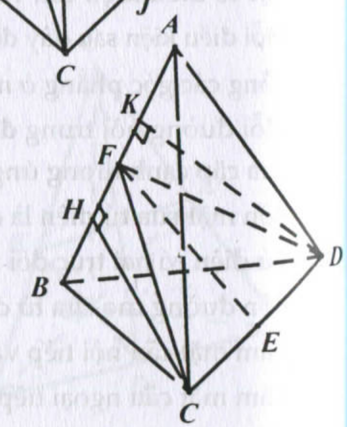
Ta có $D_1A = DA = D_2A$, $BD_1 = BD_3 = BD$, $CD_2 = CD_3 = CD$ nên A, B, C lần lượt là trung điểm của D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3 do đó $AB = \frac{1}{2}D_2D_3 = CD_2 = CD$; tương tự $AC = BD, AD = BC$. Vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều và I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, CD.



Do $AB = CD, AC = BD, BC = AD$ nên $\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow IC = ID$, từ đó ta có $IJ \perp CD$, tương tự $IJ \perp AB$ hay IJ là đường vuông góc chung của AB và CD. Lí luận tương tự ta được đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối còn lại cũng là đường vuông góc chung của chúng.

Đảo lại, giả sử đoạn IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD, khi đó IJ là đường trung trực của AB và CD nên phép đối xứng trục qua IJ biến $A \to B, C \to D \Rightarrow AC \to BD \Rightarrow AC = BD$



Tương tự ta cũng có $AD = BC, AB = CD$ nên $ABCD$ là tứ diện gần đều.

- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều thì các mặt của nó là các tam giác bằng nhau nên có diện tích bằng nhau.

Ngược lại, giả sử tứ diện $ABCD$ có các mặt có diện tích bằng nhau.

Gọi E là trung điểm của CD, H, K, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D, E trên AB. Ta có E là trung điểm của CD nên F là trung điểm của HK, mặt khác

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH, S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB.DK,$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} \Rightarrow CH = DK$ suy ra hai tam giác vuông ΔCHF và ΔDKF bằng nhau, do đó $CF = DF \Rightarrow \Delta FCD$ cân tại $F \Rightarrow FE \perp CD$, vậy đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

Do vai trò bình đẳng giữa AB và CD nên F cũng là trung điểm của AB.

Vậy EF là trục đối xứng của tứ diện $ABCD$ nên $AC = BD, AD = BC$.

Tương tự $AB = CD$, vì vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

- Hiển nhiên mỗi trục đối xứng phải đi qua trung điểm của một cặp cạnh đối nên nó là đường vuông góc chung của cặp cạnh đối đó theo tính chất 2 ta có (đpcm).
- Nếu $ABCD$ là tứ diện gần đều thì theo tính chất 3 ta có diện tích các mặt bằng nhau, áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}hS_d$ ta có ngay bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.

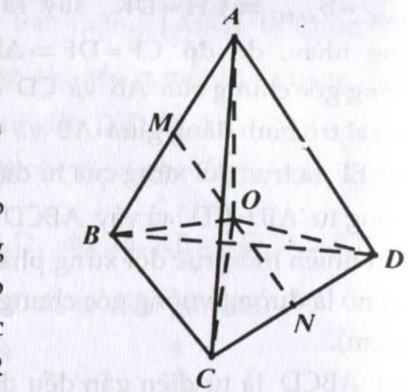
Ngược lại nếu tứ diện có bốn đường cao bằng nhau thì cũng từ công thức $V = \frac{1}{3}hS_d$ ta có diện tích bốn mặt của bằng nhau, theo tính chất 3 ta cũng có đpcm.

- Giả sử O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ ta sẽ chứng minh O cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Thật vậy, gọi O_1, O_2 lần lượt là hình chiếu của O trên các mặt ABC và DBC, khi đó O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DBC. Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\Delta ABC = \Delta DBC \Rightarrow O_1I = O_2I$, $OO_1 = OO_2$. Tương tự ta sẽ chứng minh được O cách đều các mặt của tứ diện, do đó O là tâm mặt cầu nội tiếp. Ngược lại, giả sử tứ diện $ABCD$ có tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau. Gọi O_1, O_2 là các tiếp điểm của mặt cầu nội tiếp với các mặt ABC và DBC thì O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DBC và $\Delta O_1BC = \Delta O_2BC \Rightarrow \widehat{BO_1C} = \widehat{BO_2C} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Hoàn toàn tương tự ta có $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ suy ra tổng các góc phẳng tại đỉnh A của tứ diện $ABCD$ bằng 180^0, và điều này đúng cho tất cả các đỉnh của tứ diện, vì vậy theo tính chất 1 thì $ABCD$ là tứ diện gần đều.
- Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của MN thì O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Ta chứng minh O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Thật vậy, ta có MN là đường trung trực của AB và CD nên $OA = OB, OC = OD$, lại có $OA = \sqrt{MA^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{AB^2 + MN^2}}{2}$

$OD = \sqrt{ON^2 + ND^2} = \dfrac{\sqrt{CD^2 + MN^2}}{2}$.



Mà $AB = CD \Rightarrow OA = OD$, vậy:

$OA = OB = OC = OD$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Ngược lại nếu tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau thì đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối chính là đường vuông góc chung của chúng nên theo tính chất 2 ta có đpcm.

- Tính chất này được suy ra từ hai tính chất 6 và 7.
- Giả sử ABCD là tứ diện gần đều khi đó theo Định lí 2 §2 ta có

  $S_{ABC} = S_{DAB}\cos\alpha + S_{DBC}\cos\beta + S_{DAC}\cos\gamma$ trong đó α, β, γ lần lượt là góc nhị diện các cạnh AB, BC, AC.

  Mặt khác $S_{ABC} = S_{DAB} = S_{DBC} = S_{DAC}$ nên $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

  Ngược lại, giả sử ABC là mặt có diện tích lớn nhất và $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$ với α, β, γ lần lượt là góc nhị diện các cạnh AB, Bc, AC khi đó từ:

  $S_{ABC} = S_{DAB}\cos\alpha + S_{DBC}\cos\beta + S_{DAC}\cos\gamma \Rightarrow S_{ABC} \le S_{ABC}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = S_{ABC}$

  do đó $S_{ABC} = S_{DAB} = S_{DBC} = S_{DAC} \Rightarrow$ ABCD là tứ diện gần đều.
- Giả sử $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện gần đều S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các mặt đối diện với đỉnh A_i. Gọi α, β lần lượt là góc phẳng nhị diện cạnh A_1A_2 và A_3A_4.

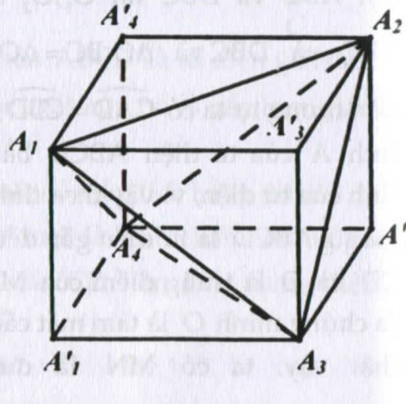
  Dựng hình hộp $A_1A_4'A_2A_3'.A_1'A_3A_2'A_4$.

  Gọi S là diện tích các mặt của tứ diện

  Áp dụng công thức:

  $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\phi)^2}{4}$

  ta có diện tích hình chữ nhật $A_1A_4'A_2A_3'$ là $S'^2 = 2S^2 - 2S^2\cos\alpha$ và diện tích hình chữ nhật $A_1'A_3A_2'A_4$ là $S''^2 = 2S^2 - 2S^2\cos\beta$



  mà $S' = S'' \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (do $0^0 < \alpha, \beta < 180^0$).

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được góc phẳng nhị diện của các cặp cạnh đối còn lại bằng nhau.

Ngược lại, giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có góc nhị diện các cặp cạnh đối bằng nhau, khi đó áp dụng công thức $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ ta có

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Rightarrow$ ABCD là tứ diện gần đều (tính chất 3).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

5. Chứng minh rằng trong tứ diện gần đều tổng côsin của các góc nhị diện bằng 2.

6. Tính thể tích của tứ diện gần đều ABCD có các cạnh $AB = CD = a$,

$$AC = BD = b,\ BC = AD = c.$$

7. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều ABCD có các cạnh $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$.

8. Cho tứ diện ABCD có $\widehat{BAC} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh ABCD là tứ diện gần đều.

9. Chứng minh trong tứ diện gần đều tất cả các góc phẳng đều nhọn.

10. Cho tứ diện gần đều OABC có α, β, γ là các góc nhị diện của các cạnh thuộc mặt ABC với $(0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^0)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha\cos\beta} + \sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

5.

Cách 1: Xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi $\alpha_{i,j}\ (i \ne j, i, j = \overline{1,4})$ là các góc phẳng nhị diện của các cạnh thuộc một mặt đối diện với đỉnh A_i.

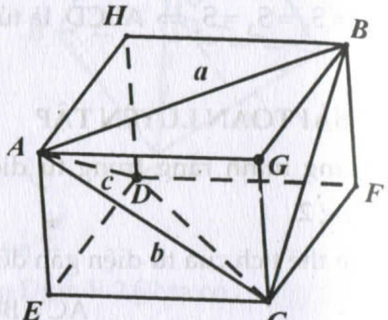
Theo tính chất 9 thì ta có $\sum\limits_{j=1, j\ne i}^{4} \cos\alpha_{i,j} = 1$ nên tổng các cô sin của các góc nhị diện là $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1, j\ne i}^{4}\sum\limits_{i=1}^{4}\cos\alpha_{i,j} = 2$.

Cách 2: Gọi $\overrightarrow{e_i}\ (i = \overline{1,4})$ là các vec tơ đơn vị có hướng vuông góc với mặt đối diện của đỉnh A_i có hướng từ một điểm trong tứ diện ra phía ngoài tứ

diện, S_i là diện tích của mặt đối diện với đỉnh A_i, theo định lí con nhím thì $S_1\vec{e_1}+S_2\vec{e_2}+S_3\vec{e_3}+S_4\vec{e_4}=\vec{0}\Rightarrow \vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}+\vec{e_4}=0$.

Bình phương hai vế ta được $4+2\sum\limits_{1\le i<j\le 4}\cos\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=0$. Lưu ý rằng $\cos\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=-\cos\alpha_{i,j}$; $i\ne j$. Từ đó ta có đpcm.

6. Dựng hình hộp $AGBH.ECFD$



Vì $ABCD$ là tứ diện gần đều nên hình hộp ngoại tiếp nó là hình hộp chữ nhật.

Đặt $AG=x, AH=y, AE=z$ thì:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{hh}=\frac{1}{3}xyz.$$

Lại có $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ y^2+z^2=b^2\\ z^2+x^2=c^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

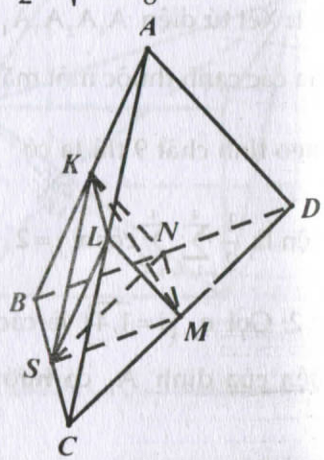
Từ đó ta có $x=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}, y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}, z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$

Nên $V_{ABCD}=\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)}{72}}$.

7. Theo bài 6, ta có hình hộp ngoại tiếp là hình hộp chữ nhật có đường chéo $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $AGBH.ECFD$ nên bán kính mặt cầu là $R=\frac{d}{2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}$.

8. Gọi S,K,L,M,N theo thứ tự là trung điểm của BC, AB, AC, CD, BD.



Dễ thấy $KLMN$ là hình bình hành.

Từ giả thiết ta suy ra được:

$\widehat{KSL}=\widehat{LSM}=\widehat{MSN}=\widehat{NSK}$ kết hợp với $KLMN$ là hình bình hành ta có được $KLMN$ là hình thoi suy ra $AD=2KN=2MN=BC$. Ta có $SK=SM$ và $SL=SN$ suy ra $AC=BD$ và $AB=CD$.

Vậy $ABCD$ là tứ diện gần đều.

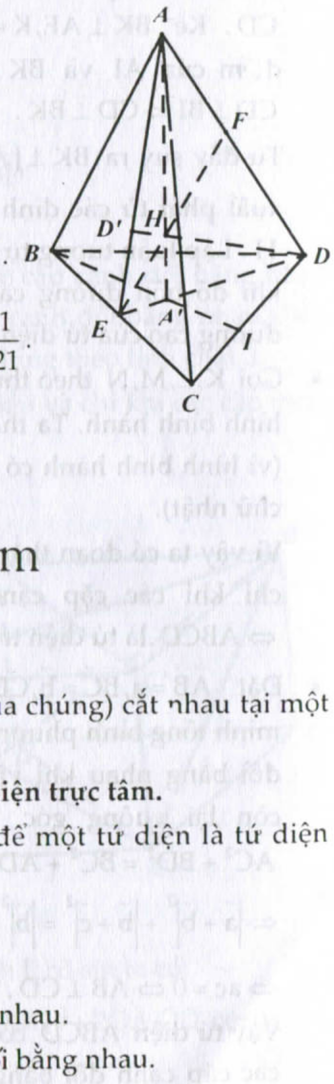
9. Dựng hình hộp $AGBH.ECFD$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, giả sử các kích thước của ba cạnh là $AG=x, AH=y, AE=z$ khi đó vì $AGBH.ECFD$ là hình hộp chữ nhật nên $AB^2=CD^2=x^2+y^2, BC^2=AD^2=y^2+z^2$, $AC^2=BD^2=x^2+z^2$.

Xét các góc phẳng tại đỉnh A ta có

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{x^2+y^2+y^2+z^2-\left(x^2+z^2\right)}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}=\frac{y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}>0.$$

Tính toán tương tự cho tất cả các góc phẳng còn lại ta được đpcm.

10. Theo tính chất 9 ta có $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.



$$\sqrt{\cos\alpha.4\cos\beta}\le\frac{\cos\alpha+4\cos\beta}{2}$$

$$\sqrt[3]{\cos\alpha.4\cos\beta.16\cos\gamma}=\frac{\cos\alpha+4\cos\beta+16\cos\gamma}{3}$$

$$P\le\cos\alpha+\frac{1}{4}\left(\cos\alpha+4\cos\beta\right)+\frac{1}{12}\left(\cos\alpha+4\cos\beta+16\cos\gamma\right)=\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\cos\alpha=\frac{16}{21}, \cos\beta=\frac{4}{21}, \cos\gamma=\frac{1}{21}$.

Vậy GTLN của P là $\frac{4}{3}$.

Tứ diện trực tâm

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

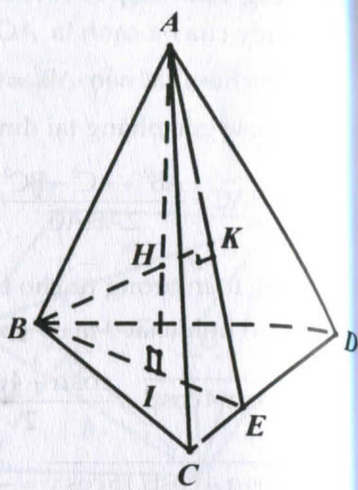
Tứ diện có các đường cao (hoặc phần kéo dài của chúng) cắt nhau tại một điểm được gọi là tứ diện trực tâm.

2. Một số điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

Mỗi điều kiện sau là một điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

- Một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc.
- Các đoạn thẳng nối các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tích các côsin của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Các góc giữa các cạnh đối bằng nhau.
- Chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.

Chứng minh:



- Giả sử tứ diện ABCD có bốn đường cao cắt nhau tại H, khi đó $AH \perp CD, BH \perp CD$ nên $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

  Tương tự $AD \perp BC, AC \perp BD$.

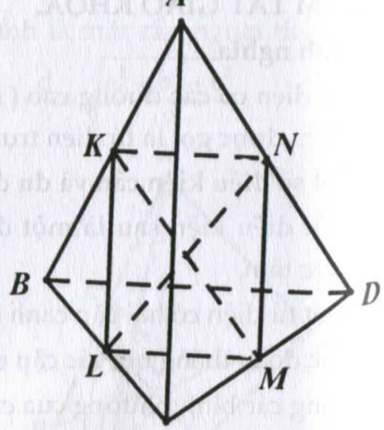
  Ngược lại, giả sử tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc. Gọi AI là đường cao của hình chóp và E là giao điểm của BI và CD. Kẻ $BK \perp AE, K \in AE$, gọi H là giao điểm của AI và BK. Khi đó $CD \perp AB$ và $CD \perp BI \Rightarrow CD \perp BK$.

  Từ đây suy ra $BK \perp (ACD)$. Hay đường cao xuất phát từ các đỉnh A và B cắt nhau tại H. Lập luận tương tự ta được bốn đường cao của tứ diện đôi một cắt nhau, khi đó bốn đường cao hoặc đồng phẳng hoặc đồng quy, mặt khác bốn đường cao của tứ diện thì không thể đồng phẳng nên chúng đồng quy.

- Gọi K, L, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA thì KLMN là hình bình hành. Ta thấy $AB \perp CD \Leftrightarrow$ KLMN là hình chữ nhật $\Leftrightarrow KM = LN$ (vì hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi nó là hình chữ nhật).

  Vì vậy ta có đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc

  $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện trực tâm (TC1)



- Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Ta chứng minh tổng bình phương của hai cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi cặp cạnh còn lại vuông góc. Thật vậy, giả sử $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$

  $\Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2$

  $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$.

  Vậy tứ diện ABCD có tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau $\Leftrightarrow$ tứ diện ABCD các cặp cạnh đối vuông góc $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện trực tâm (TC1).

- Kí hiệu $\widehat{AB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh AB. Theo định lí sin trong tứ diện ta có $\dfrac{AB.CD}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{CD}} = \dfrac{AC.BD}{\sin\widehat{AC}.\sin\widehat{BD}}$ (1).

  Mặt khác theo định lí Bretsnây "Trong tứ diện ABCD với cặp cạnh đối a, b và α, β là góc phẳng nhị diện tương ứng của chúng thì

  $$a^2 + b^2 + 2ab\cot\alpha\cot\beta = \frac{2\left(\sum\limits_{1\le i<j\le 4} S_i^2S_j^2\right) - \sum\limits_{i=1}^{4} S_i^4}{9V^2}$$ (không đổi); trong đó $S_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ là diện tíc các mặt và V là thể tích của tứ diện."

  Ta có $AB^2 + CD^2 + 2AB.CD\cot\widehat{AB}.\cot\widehat{CD}$

  $= AC^2 + BD^2 + 2AC.BD\cot\widehat{AC}.\cot\widehat{BD}$ (2).

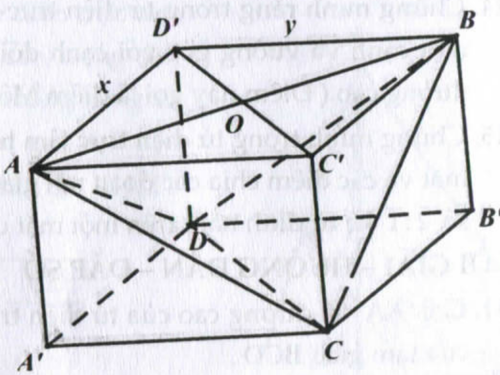
  Từ (1) và (2) suy ra $\cos\widehat{AB}.\cos\widehat{CD} = \cos\widehat{AC}.\cos\widehat{BD}$

  $\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

  Từ đó ta có tích các côsin của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau.Điều này tương đương với ABCD là tứ diện trực tâm đúng theo tính chất 3.

- Ta chứng minh góc giữa các cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc.

  Gọi α là số đo góc giữa hai cạnh đối (của tất cả các cặp cạnh đối)



  Giả sử $\alpha \ne 90^0$. Ta chứng minh trong ba số $AB.CD\cos\alpha$, $CB.AD\cos\alpha$, $AC.BD\cos\alpha$ có một số bằng tổng của hai số còn lại.

  Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện ABCD mà mỗi mặt của hình hộp đi qua một cạnh và song song với cạnh đối diện (hình vẽ).

  Đặt $AD' = x, D'B = y$, giả sử $x \ge y$ khi đó theo định lí cô sin ta có:

  $AD'^2 = OA^2 + OD'^2 - 2OA.OD'\cos(\pi - \alpha) = OA^2 + OD'^2 + 2OA.OD'\cos\alpha$

  hay $4x^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB.CD\cos\alpha$ (1).

  Tương tự $4y^2 = AB^2 + CD^2 - 2AB.CD\cos\alpha$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$AB.CD\cos\alpha = x^2 - y^2$. Thiết lập các hệ thức tương tự nữa ta thu được ba số $AB.CD\cos\alpha,\ CB.AD\cos\alpha,\ AC.BD\cos\alpha$ có một số bằng tổng của hai số còn lại. Giả sử $AB.CD\cos\alpha = AD.BC\cos\alpha + AC.BD\cos\alpha \Leftrightarrow AB.CD = AD.BC + AC.BD$ (vô lí), công thức Crelle thì $AB.CD, AD.BC, AC.BD$ là ba cạnh của một tam giác). Vậy $\alpha = 90^0$ do đó ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc. Theo tính chất 1 ta có điều cần chứng minh.

- Nếu ABCD là tứ diện trực tâm thì dễ dàng chứng minh được chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.

Ngược lại nếu chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó thì ta chứng minh được các cặp cạnh đối vuông góc, vì vậy tứ diện này là tứ diện trực tâm (tính chất 3).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

11. Chứng minh trong tứ diện trực tâm các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

12. Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm:

a) Tất cả các góc phẳng tại một đỉnh hoặc đều nhọn hoặc đều vuông hoặc đều tù.

b) Có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

13. Chứng minh trong tứ diện trực tâm $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$ trong đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp, H là điểm đồng quy của bốn đường cao và d là khoảng cách giữa hai trung điểm của các cặp cạnh đối.

14. Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm các mặt phẳng đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại giao điểm của các đường cao.(Điểm này gọi là điểm Mônggiơ của tứ diện)

15. Chứng minh trong tứ diện trực tâm trọng tâm của các mặt, trực tâm của các mặt và các điểm chia các đoạn nối giao điểm các đường cao với đỉnh, theo tỉ số $2:1$ kể từ đỉnh nằm trên một mặt cầu (mặt cầu 12 điểm)

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

11. Gọi AA' là đường cao của tứ diện trực tâm ABCD, thế thì A' là trực tâm của tam giác BCD.

Gọi $E = BC \cap DA'$ và H là điểm đồng quy của bốn đường cao, $F = EH \cap AD$

Khi đó $\begin{cases} BC \perp DA' \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp EF$. Lại có H là trực tâm của tam giác ADE nên $EF \perp AD$ điều này chứng tỏ đường vuông góc chung EF của cặp cạnh đối AD, BC đi qua H. Dĩ nhiên các đường vuông góc chung của hai cặp cạnh còn lại cũng đi qua H.

Vậy trong tứ diện trực tâm các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

12. a) Xét tứ diện trực tâm ABCD, ta chứng minh các góc tại đỉnh A cùng nhọn hoặc cùng vuông hoặc cùng tù. Thật vậy, theo tính chất 3 ta có

$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = CB^2 + AD^2$ (1).

Áp dụng định lí cô sin ta có

$2AB.AC\cos\widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ (2)

$2AB.AD\cos\widehat{BAD} = AB^2 + AD^2 - BD^2$ (3)

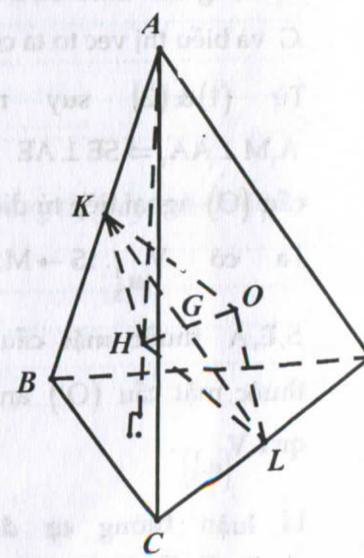
$2AC.AD\cos\widehat{CAD} = AC^2 + AD^2 - CD^2$ (4).

Từ (1),(2),(3) & (4) suy ra:

$AB.AC.\cos\widehat{BAC} = AB.AD\cos\widehat{BAD} = AC.AD\cos\widehat{CAD}$ nên các góc tại đỉnh A hoặc cùng nhọn, hoặc cùng vuông hoặc cùng tù.

b) Nếu tất cả các góc ở mỗi đỉnh đều nhọn thì khẳng định của bài toán đúng. Nếu có một góc nào đó không nhọn thì không giảm tổng quát, giả sử $\widehat{BAC} \ge 90^0$ khi đó các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nhọn, dẫn đến $\widehat{DBC}$ và $\widehat{BCD}$ nhọn. Lại có $\widehat{DAC} \ge 90^0 \Rightarrow \widehat{ADC}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{BDC}$ nhọn. Từ các điều trên chúng tỏ tam giác BCD nhọn.

13. Trước hết chúng ta để ý trong tứ diện trực tâm thì giao điểm H của bốn đường cao, trọng tâm G và tâm mặt cầu ngoại tiếp O thẳng hàng và G là trung điểm của OH, do đó gọi K,L lần lượt là trung điểm của AB và CD thì KHLO là hình bình hành tâm G.



Ta có $OK = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}, OL = \sqrt{R^2 - \frac{CD^2}{4}}$

Trong hình bình hành KHLO ta có

$OH^2 + KL^2 = 2\left(OK^2 + OL^2\right)$

$$\Leftrightarrow OH^2 = 2\left(R^2 - \frac{AB^2}{4}\right) + 2\left(R^2 - \frac{CD^2}{4}\right) - d^2 = 4R^2 - d^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}.$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có:

$$4LK^2 = 2(LA^2 + LB^2) - AB^2$$

$$= \left(AC^2 + AD^2 - \frac{CD^2}{2}\right) + \left(BC^2 + BD^2 - \frac{CD^2}{2}\right) - AB^2$$

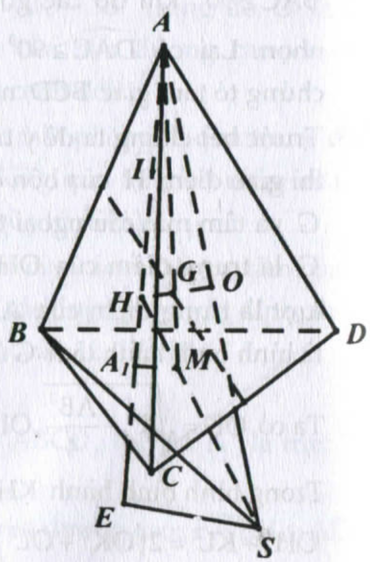
$$\Leftrightarrow 4d^2 = AC^2 + AD^2 + CB^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2 = AB^2 + CD^2$$

$\Leftrightarrow d = \dfrac{AB^2 + CD^2}{4}$ (Do trong tứ diện trực tâm thì $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$). Vậy $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$.

14) Vì $AB \perp CD$ nên tồn tại mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với CD, mặt phẳng này chứa giao điểm hai đường cao hạ từ A và B.

Lí luận tương tự ta được các mặt phẳng còn lại cũng đi qua H. Hay các mặt phẳng này đồng quy tại H.

15) Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C, D; M, N, P, Q là trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và I, J, K, F là các điểm trên các đường cao AH, BH, CH, DH sao cho $\dfrac{HI}{HA} = \dfrac{HJ}{HB} = \dfrac{HK}{HC} = \dfrac{HF}{HD} = \dfrac{1}{2}$.



Gọi S là điểm đối xứng với A qua O và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{HE} = 3\overrightarrow{HA_1}$ (1).

Sử dụng tích chất H, O đối xứng nhau qua G và biểu thị vec tơ ta có $\overrightarrow{HS} = 3\overrightarrow{HM}$ (2).

Từ (1)&(2) suy ra $A_1M // ES$ mà $A_1M \perp AA_1 \Rightarrow SE \perp AE$ hay E thuộc mặt cầu (O) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có $V_{\left(H, \frac{1}{3}\right)}: S \to M, E \to A_1, A \to I$ mà S, E, A thuộc mặt cầu (O) nên M, A_1, I thuộc mặt cầu (O') ảnh của mặt cầu (O) qua $V_{\left(H, \frac{1}{3}\right)}$.

Lí luận tương tự đối với các mặt còn lại ta được 12 điểm $A_1, B_1, C_1, D_1, M, N, P, Q, I, J, K, F$ cùng thuộc mặt cầu (O').

Mục lục